



اهتمام ادبی (واحد آزمون‌های آنلاین)  
<https://exam.ehtemameadabi.ir>

فصل اول

## ترسیم‌های هندسی و استدلال



■ هندسه و به‌ویژه ترسیم‌های هندسی از دیرباز مورد استفاده بشر بوده‌است.

درس اول

## ترسیم‌های هندسی

انسان از دوران باستان تاکنون همواره از هندسه و به‌ویژه از ترسیم‌های هندسی برای حل مسائل مختلف یاری گرفته است.  
از تقسیم‌بندی زمین‌های کشاورزی تا طراحی انواع ابزارهای کاربردی پیشرفته کنونی، همگی نیازمند ترسیم‌های هندسی است.

### فعالیت

(برای مراحل زیر از خطکش و پرگار استفاده کنید.)

۱- نقطه‌ای مانند O را در صفحه در نظر بگیرید و برای رسم کردن از خط‌کش و پرگار استفاده کنید.

نقاطی را مشخص کنید که فاصله یکسانی از نقطه O دارند. (مثلاً همه نقاطی که فاصله‌شان از نقطه O برابر ۲ سانتی متر است.)

۲- نقاط A و B را در نظر بگیرید. دهانه پرگار را بیش از نصف طول پاره خط AB باز کنید و یک بار به مرکز A و بار دیگر به مرکز B و با همان شعاع قبلی کمان بزنید تا یکدیگر را در نقاط U و V قطع کنند. U و V چه ویژگی مشترکی دارند؟

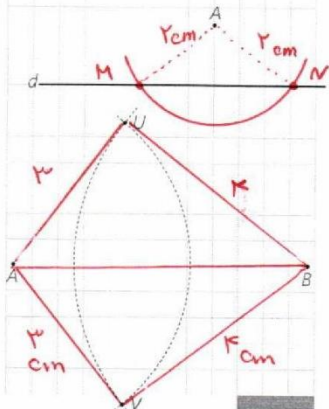
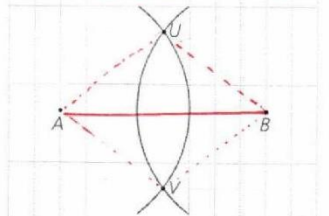
از دوسر پاره خط AB به یک فاصله هفت سانتی متر.

۳- نقطه A، مانند شکل مقابل به فاصله ۱ سانتی متر از خط d قرار دارد. نقاطی از خط d را بیابید که به فاصله ۲ سانتی متر از نقطه A باشند. کافی است به مرکز A دو شعاع ۲ سانتی متری رسم کنیم تا خط d را در نقاط M و N قطع کند.

۴- نقاط A و B را به فاصله ۵ سانتی متر از هم در نظر بگیرید. دهانه پرگار را به اندازه ۳ سانتی متر باز کنید و از نقطه A یک کمان بزنید. سپس دهانه پرگار را به اندازه ۴ سانتی متر باز کنید و از نقطه B یک کمان بزنید.

الف) نقاط روی کمان اول چه ویژگی مشترکی دارند؟  
همگی تا نقطه A به فاصله ۳ سانتی متر قرار دارند.

کافی است به مرکز O شعاع دهانه پرگار  
شعاع ۲  
دایره رسم کنیم.  
تمام نقاط روی دایره جواب مسئله هستند.





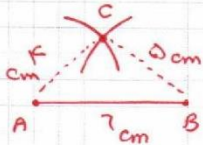
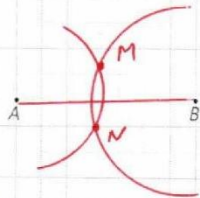
ب) نقاط روی کمان دوم چه ویژگی مشترکی دارند؟ **همگی مانده‌ی B به فاصله‌ی ۴ سانتی متری قرار دارند.**

پ) نقاط تقاطع دو کمان فاصله‌شان از نقاط A و B چگونه است؟ برای اینکه چنین نقاط تقاطعی وجود داشته باشند، اندازه شعاع آنها و فاصله نقاط A و B چه شرطی باید داشته باشند؟

$$AU = 3 \text{ cm} \quad BU = 4 \text{ cm} \\ AV = 3 \text{ cm} \quad BV = 3 \text{ cm} \quad AU + BU > AB$$

ت) طول اضلاع مثلث AUB چقدر است؟

$$AU = 3 \\ BV = 4 \\ AB^2 = AU^2 + BV^2 = 9 + 16 = 25 \\ \Rightarrow AB = 5 \text{ cm}$$



- الف) ۵ و ۶ و ۴
- ب) ۳ و ۳ و ۳
- پ) ۵ و ۱ و ۲

کاردرکلاس

۱- دو نقطه مانند A و B را به فاصله ۳ سانتی متر از هم در نظر بگیرید. نقاطی را بیابید که فاصله‌شان از A، ۲ و از B، ۲/۵ سانتی متر باشد. **کافی است به مرکز A یک دایره با شعاع ۲ و از نقطه B یک کمانی به شعاع ۲/۵ سانتی متر رسم کنیم. نقاط تقاطع دو دایره جواب مسئله هستند.**  
۲- توضیح دهید که چگونه می‌توان مثلثی به طول اضلاع ۴ و ۵ و ۶ واحد رسم کرد. **ابتدا با خط کشی یک پایه خط به اندازه ۶ سانتی متر رسم می‌کنیم. سپس از دو سر این پایه یک خط‌کش کمانه به شعاع ۴ و از یک کمانه به شعاع ۵ رسم می‌کنیم. مثلث جاهای خالی را به گونه‌ای کامل کنید که مسئله زیر:**  
۳- جاهای خالی را به گونه‌ای کامل کنید که مسئله زیر:

- الف) دو جواب داشته باشد.
- ب) یک جواب داشته باشد.
- پ) جواب نداشته باشد.

نقاط A و B به فاصله ..... از هم قرار دارند. نقطه‌ای پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطه A برابر ..... و از نقطه B برابر ..... باشد.

برخی خواص نیمساز و ترسیم آن

فعالیت

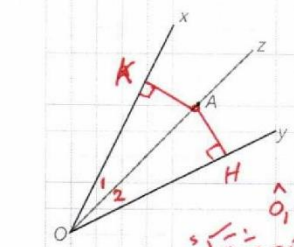
۱- زاویه xOy و نیم خط Oz را نیمساز آن در نظر بگیرید. فرض کنید نقطه A نقطه‌ای دلخواه روی Oz باشد. ثابت کنید که فاصله نقطه A از دو ضلع زاویه xOy یکسان است. (یعنی اگر از نقطه A عمودهایی بر نیم خط‌های Ox، Oy رسم کنیم طول آنها باهم برابر است.)

$$\Rightarrow \triangle OAH \cong \triangle OAK \Rightarrow AH = AK \\ \text{(دو کمانه زاویه حاده)}$$

نتیجه

اگر نقطه‌ای روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، فاصله آن نقطه از دو ضلع

آن زاویه یک فاصله هستند.



توجه: حالت هندسی (رضی ز) این زاویه‌ها برابرند



## اهتمام ادبی (واحد آزمون‌های آنلاین)

<https://exam.ehtemameadabi.ir>

۲- زاویه  $xOy$  و نقطه  $A$  را چنان در نظر می‌گیریم که فاصله نقطه  $A$  از نیم خط‌های  $Ox$  و  $Oy$  باهم برابر باشد.

نشان دهید که نقطه  $A$  روی نیمساز زاویه  $xOy$  قرار دارد.

(راهنمایی: پاره خط  $OA$ ، و دو عمود از نقطه  $A$  بر خطوط  $Ox$  و  $Oy$  رسم کنید و نشان دهید پاره خط  $OA$  همان نیمساز  $xOy$  است.)

### نتیجه ۲

اگر نقطه‌ای به فاصله یکسان از دو ضلع یک زاویه باشد، آن نقطه روی نیمساز زاویه قرار دارد.

### نتیجه ۱

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: هر نقطه که روی نیمساز زاویه قرار داشته باشد، از دو ضلع زاویه به فاصله یکسان است... و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

### فعالیت

۱- زاویه  $xOy$  را در نظر بگیرید. دهانه پرگار را کمی باز کنید و به مرکز  $O$  کمانی بزنید تا نیم خط‌های  $Ox$  و  $Oy$  را به ترتیب در نقاط  $A$  و  $B$  قطع کند.

- طول پاره خط‌های  $OA$  و  $OB$  نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟  
 $OA = OB$  چون توسط پرگار به مرکز  $O$  شعاع یکسان رسم شده‌اند.

۲- دهانه پرگار را کمی باز کنید (بیش از نصف طول  $AB$ ) و یک بار به مرکز  $A$  و بار دیگر با همان اندازه و به مرکز  $B$  یک کمان بزنید تا دو کمان مانند شکل در نقطه‌ای مانند  $W$  همدیگر را قطع کنند.

- طول پاره خط‌های  $AW$  و  $BW$  نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟  
 $AW = BW$  چون شعاع پرگار ثابت مانده است.

- پاره خط‌های  $WA$  و  $WB$  و  $WO$  را رسم کنید. دو مثلث  $OAW$  و  $OAW$  نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟  
صنعت به حالت تساوی سه ضلع

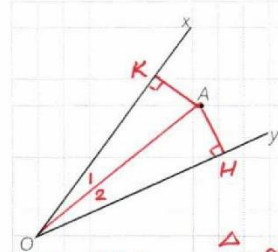
- اندازه زاویه‌های  $AOW$  و  $BOW$  نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟ مساوی چون گوشه‌ها صناعت هستند.

- پاره خط  $OW$  برای زاویه  $xOy$  چه نوع پاره خطی است؟  
نیمساز زاویه

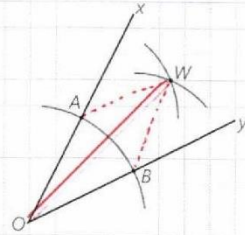
$xOy$  است.

### کاردرکلاس

روش رسم نیمساز یک زاویه را توضیح دهید. ابتدا این زاویه را بخواه رسم کنیم از راس زاویه یک کمان به مرکز آن رسم کردیم که دو کمان با شعاع‌ها مساوی رسم کنیم طوری که این دو کمان متقاطع باشند. اگر نقطه‌ای متقاطع این دو کمان را به راس زاویه وصل کنیم، نصف زاویه به دست می‌آید.



$\triangle OAH \cong \triangle OAK$   
 $\left. \begin{matrix} AH = AK \\ OA = OA \end{matrix} \right\} \Rightarrow \triangle OAH \cong \triangle OAK$   
(موسسه ضلع)  
یعنی  $OA$  نیمساز زاویه  $xOy$  است.  
توجه: حالت (ض ض ض) را نیز می‌توان بکار برد.



$\left. \begin{matrix} OA = OB \\ AW = BW \\ OW = OW \end{matrix} \right\} \Rightarrow \triangle AOW \cong \triangle BOW$   
(ض ض ض)  
 $\Rightarrow \hat{AOW} = \hat{BOW}$

برخی خواص عمودمنصف و ترسیم آن

فعالیت

۱- پاره خط AB و عمودمنصف آن را مانند شکل مقابل در نظر بگیرید و فرض کنید W نقطه‌ای روی عمودمنصف AB باشد. نشان دهید نقطه W از دوسر پاره خط AB به یک فاصله است.  $\triangle AWH \cong \triangle BWH \Rightarrow AW = BW$

نتیجه ۱

اگر نقطه‌ای روی عمودمنصف یک پاره خط قرار داشته باشد، از دوسر آن پاره خط به یک فاصله است.

۲- پاره خط AB و نقطه W را به گونه‌ای در نظر بگیرید که نقطه W از A و B به یک فاصله باشد (یعنی  $WA = WB$ ) نشان دهید W روی عمودمنصف AB قرار دارد.

(راهنمایی: از نقطه W به A و B و به وسط پاره خط AB وصل کنید و نشان دهید مثلث‌های ایجاد شده باهم هم‌نهشت هستند و از این مطلب استفاده کنید و نشان دهید W روی عمودمنصف پاره خط AB قرار دارد.)

نتیجه ۲

اگر نقطه‌ای از دوسر یک پاره خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف پاره خط قرار دارد.

نتیجه

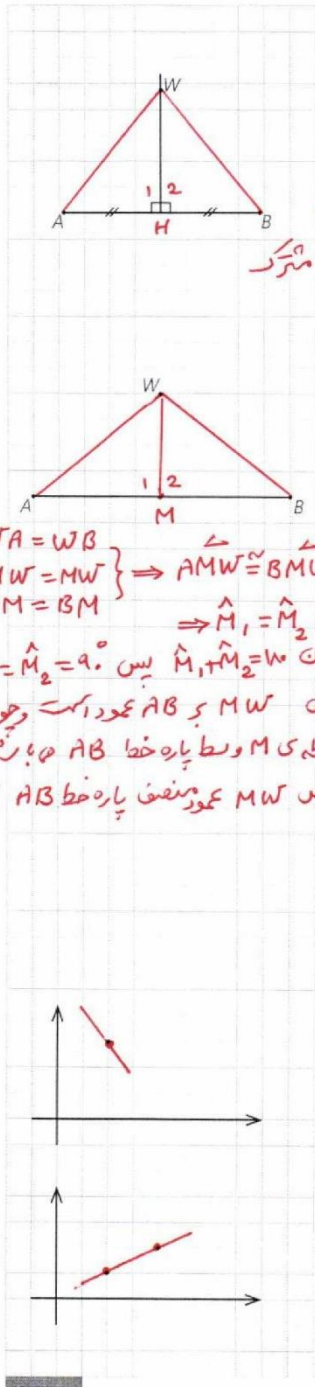
از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: هر نقطه که روی عمودمنصف یک پاره خط باشد، از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است. و هر نقطه که از دو سر پاره خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره خط قرار دارد.

فعالیت

۱- یک نقطه را در صفحه در نظر بگیرید و خطی بکشید که از آن نقطه عبور کند. چند خط متمایز می‌توانید رسم کنید که از نقطه مورد نظر بگذرد؟ **بی شمار**

۲- دو نقطه را در یک صفحه در نظر بگیرید و خطی بکشید که از آن دو نقطه عبور کند. چند خط متمایز می‌توانید رسم کنید که از هر دو نقطه مورد نظر بگذرد؟ **فقط یک خط**

۳- به نظر شما برای اینکه یک خط به طور کامل مشخص باشد، حداقل چند نقطه از آن خط را باید داشته باشیم؟ **دو نقطه**



$$\left. \begin{aligned} AH = BH \\ \hat{A}_1 = \hat{B}_2 = 90^\circ \\ WH = WH \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle AWH \cong \triangle BWH \Rightarrow AW = BW$$

(ض. من. ض.)

$$\left. \begin{aligned} WA = WB \\ MW = MW \\ AM = BM \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle AMW \cong \triangle BMW$$

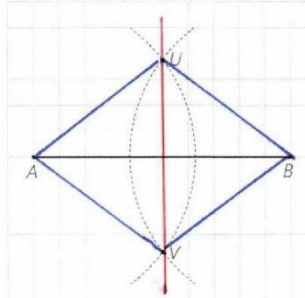
$$\Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{M}_2$$

چون  $\hat{M}_1 + \hat{M}_2 = 180^\circ$  پس  $\hat{M}_1 = \hat{M}_2 = 90^\circ$  یعنی  $MW \perp AB$  و چون نقطه M وسط پاره خط AB است پس  $MW$  عمودمنصف پاره خط AB است.



فعالیت

- پاره خط AB را مانند شکل مقابل در نظر بگیرید.
- دهانه پرگار را بیش از نصف طول AB باز کنید و یک بار از نقطه A و بار دیگر با همان اندازه از نقطه B کمان بزنید تا یکدیگر را در دو نقطه مانند U و V قطع کنند.
  - طول پاره خط‌های AU و BU نسبت به هم چگونه اند؟ چرا؟ مساوند، زیرا اندازه شعاع دایره ثابت است.
  - طول پاره خط‌های AV و BV نسبت به هم چگونه اند؟ چرا؟ مساوند، زیرا اندازه شعاع دایره ثابت است.
  - آیا می‌توان گفت نقاط U و V روی عمود منصف پاره خط AB قرار دارند؟ چرا؟ بله، چون از دوسو پاره خط AB به یک فاصله هستند.
  - عمود منصف پاره خط AB را رسم کنید.



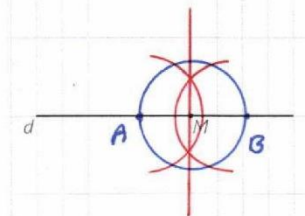
کاردرکلاس

مراحل رسم عمود منصف یک پاره خط را توضیح دهید. پرگار را به اندازه بیش از نصف پاره خط AB باز کرده و از هر طرف یک کمان رسم می‌کنیم (از نقاط A و B) خط حاصل از تقاطع نقاط این دو کمان عمود منصف AB است.

رسم خط عمود بر یک خط و رسم خط موازی با یک خط

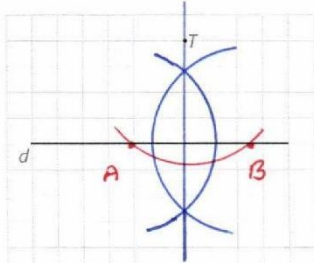
فعالیت

- رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای روی آن
- خط d و نقطه M را روی آن، مانند شکل مقابل در نظر بگیرید. می‌خواهیم خطی بکشیم که از M بگذرد و بر d عمود باشد.
- به کمک پرگار چگونه می‌توانید نقاط A و B را روی خط d بیابید؛ به گونه‌ای که M وسط پاره خط AB باشد. به شعاع دلخواه کمانی به مرکز M رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط A و B قطع کند.
  - عمود منصف پاره خط AB را رسم کنید.
  - عمود منصف پاره خط AB خطی است که بر خط d عمود... و از نقطه M بگذرد.



کاردرکلاس

مراحل رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای روی آن را توضیح دهید. ابتدا نقطه M دلخواه روی خط d را در نظر بگیریم. به شعاع دلخواه کمانی به مرکز M رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط A و B قطع کند. حال عمود منصف پاره خط AB را رسم می‌کنیم.



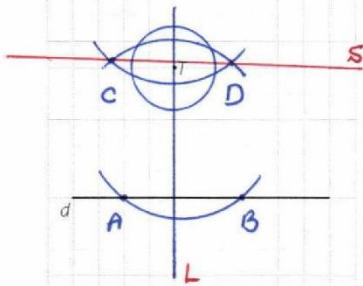
فعالیت

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای غیر واقع بر آن خط d و نقطه T را که غیر واقع بر آن است، مانند شکل مقابل در نظر بگیرید. می‌خواهیم خطی بکشیم که از T بگذرد و بر خط d عمود باشد.

- ۱- به کمک پرگار چگونه می‌توانید نقاط A و B را روی خط d به گونه‌ای بیابید که از نقطه T به یک فاصله باشند. به مرکز T کمانی رسم می‌کنیم که خط d را در دو نقطه متقاطع کند.
- ۲- عمود منصف پاره خط AB را رسم کنید.
- ۳- آیا عمود منصف پاره خط AB از نقطه T می‌گذرد؟ چرا؟ بله، زیرا نقطه T از دو سر پاره خط AB به یک فاصله است. عمود منصف پاره خط AB خطی است که بر خط d عمود... و از نقطه T... بگذرد.

روش رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای خارج آن را توضیح دهید. ابتدا از نقطه T کمانی رسم می‌کنیم که خط مورد نظر را در دو نقطه A و B قطع کند. عمود منصف پاره خط AB خطی است که بر خط d عمود است.

کاردکلاس



فعالیت

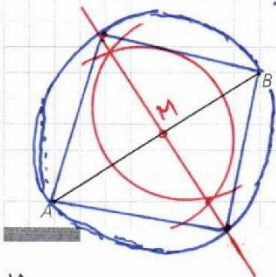
رسم خط موازی با خط داده شده از یک نقطه غیر واقع بر آن خط d و نقطه T مانند شکل مقابل داده شده‌اند. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطه T بگذرد و با خط d موازی باشد.

- ۱- خط d<sub>1</sub> را به گونه‌ای رسم کنید که از نقطه T بگذرد و بر خط d عمود باشد.
- ۲- خط d<sub>2</sub> را به گونه‌ای رسم کنید که از نقطه T بگذرد و بر خط d<sub>1</sub> عمود باشد.
- ۳- خط d<sub>2</sub> نسبت به خط d چه وضعیتی دارد؟ چرا؟ (خط d<sub>2</sub> را موازی در نظر بگیرید.)

$L \perp d$   
 $L \perp s \rightarrow d \parallel s$

روش رسم خط موازی با یک خط از نقطه‌ای خارج آن را توضیح دهید. ابتدا از نقطه T خطی عمود بر خط مورد نظر رسم می‌کنیم. خط دیگر عمود بر خط عمود بر خط رسم می‌کنیم.

کاردکلاس



فعالیت

پاره خط داده شده AB در شکل مقابل را با اندازه 4 واحد در نظر بگیرید. الف) عمود منصف پاره خط AB را رسم کنید و فرض کنید نقطه برخورد این عمود منصف با پاره خط AB، M باشد.



اهتمام ادبی (واحد آزمون‌های آنلاین)

<https://exam.ehtemameadabi.ir>

ب) به مرکز M و به شعاع AM دایره‌ای رسم کنید تا عمود منصف AB را در نقاط C و D قطع کند.

ب) چهارضلعی ACBD چگونه چهارضلعی‌ای است؟ چرا؟ مربع است

نیز قطرهای مربع چهارضلعی هم برهم می‌خورند و هم همدیگر را نصف می‌کنند.

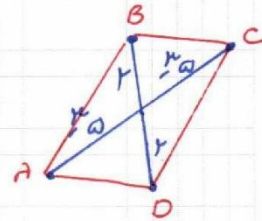
کارد کلاس

طریقه رسم مربعی را که طول قطر آن داده شده باشد، توضیح دهید. ابتدا عمود منصف قطر مربع را رسم می‌کنیم. از نقطه‌ی تقاطع عمود منصف و قطر (قطب‌المقابل) دایره را به مرکز این نقطه و به شعاع نصف قطر رسم می‌کنیم. نقطه‌ی تقاطع دایره با عمود منصف را به نقطه‌ی دوسر باره خطاره نشده وصل می‌کنیم.



تمرین

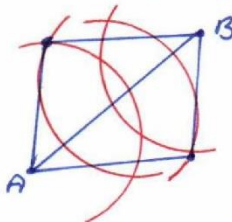
- ۱- می‌دانیم چندضلعی‌ای که قطرهایش منصف هم باشند، متوازی‌الاضلاع است. متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۴ و ۷ باشد. چند متوازی‌الاضلاع به طول قطرهای ۴ و ۷ می‌توان رسم کرد؟ دو باره خط طوری رسم می‌کنیم که همدیگر را منصف کنند. با اتصال متوالی دوسر باره خط‌ها چهار ضلعی مورد نظر (متوازی‌الاضلاع) حاصل می‌شود. بی‌شمار.
- ۲- می‌دانیم چندضلعی‌ای که قطرهایش با هم برابر و منصف هم باشند، مستطیل است. مستطیلی رسم کنید که طول قطر آن ۶ سانتی‌متر باشد.



- ۳- پاره خط AB داده شده است. دهانه‌ی پرگار را یک بار به اندازه a و بار دیگر به اندازه b باز می‌کنیم و از نقطه A دو کمان می‌زنیم. (به طوری که مجموع a و b از اندازه AB بزرگ‌تر باشد) سپس کمان‌هایی با همان اندازه‌ها، این بار از نقطه B می‌زنیم و مانند شکل، دو نقطه از نقاط برخورد را C و D می‌نامیم. چهارضلعی ACBD چه نوع چندضلعی‌ای است؟ چرا؟ (راهنمایی: ابتدا بررسی کنید که مثلث‌های ABC و ABD و زوایای  $A_1$  و  $B_1$  نسبت به هم چگونه‌اند.)

$$\left. \begin{array}{l} AC = BD \\ BC = AD \\ AB = AB \text{ (مشترک)} \end{array} \right\} \rightarrow \triangle ABC \cong \triangle ABD \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \Rightarrow AC \parallel BD \left. \begin{array}{l} \text{چهارضلعی} \\ \text{مربعی ACBD} \\ \text{الاضلاع است.} \end{array} \right\} \text{ چون } AC = BD$$

- ۴- متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول ضلع‌هایش ۳ و ۵ و طول یک قطر آن ۶ باشد. مشابه تمرین ۳ ابتدا قطر را رسم می‌کنیم.

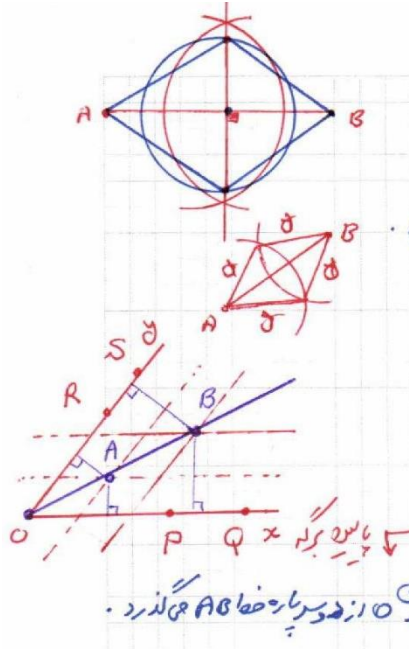






اهتمام ادبی (واحد آزمون‌های آنلاین)

<https://exam.ehtemameadabi.ir>



۵- می‌دانیم که برای لوزی بودن یک چهارضلعی کافی است که قطرهای آن چهارضلعی عمود منصف یکدیگر باشند. ترسیم‌های زیر را انجام دهید.

الف) یک لوزی رسم کنید که طول قطرهای آن ۳ و ۵ باشد. دوباره خط عمود برهم

کین به طول ۳ و دیگر به طول ۵ رسم کنید. چه رفتاری نسبت به هم دارند. ب) یک لوزی به طول ضلع ۵ و طول قطر ۶ رسم کنید.

مانند رسم متوازی الاضلاع ابتدا قطر را رسم کنید.

۶- دو ضلع یک زاویه را در نظر بگیرید.

الف) نقطه‌ای بیابید که فاصله آن از هر ضلع زاویه مورد نظر ۲ واحد باشد.

ب) نقطه‌ای بیابید که فاصله آن از هر ضلع زاویه مورد نظر ۴ واحد باشد.

پ) با استفاده از الف) و ب) نیمساز زاویه مورد نظر را رسم کنید.

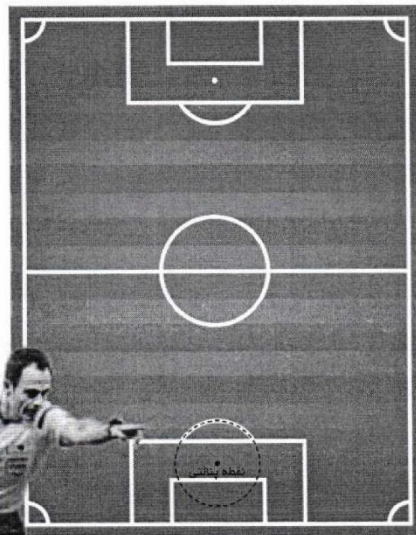
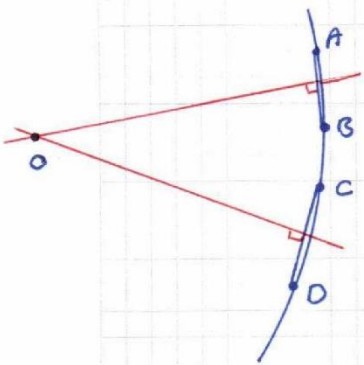
ابتدا از نقطه‌ی دلخواه روی خط عمود خطی موازی آن رسم کنید. سپس از نقطه‌ی دلخواه دیگر روی خط عمود خطی موازی آن رسم کنید. وتری مانند AB از یک دایره را در نظر بگیرید. وضعیت عمود منصف AB و مرکز دایره نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

عمود منصف AB از نقطه‌ی O می‌گذرد. چون از هر دو پارچه خط AB می‌گذرد. مرکز دایره

نقطه‌ی پناهی محل تقاطع دو وتر از قوس جلوی محوطه‌ی حیدرآباد است.

آیا می‌دانستید که در زمین فوتبال نقطه پناهی مرکز دایره‌ای است که قسمتی از قوس آن در جلوی محوطه جریمه کشیده شده است؟

یک داور فوتبال لحظه‌ای که اعلام پناهی می‌کند، متوجه می‌شود که نقطه پناهی مشخص نیست. اگر او وسایل لازم برای کشیدن خط راست و کمان دایره را داشته باشد، چگونه می‌تواند با استفاده از قوس جلوی محوطه حیدرآباد، نقطه پناهی را مشخص کند.



اگر به همی که تیب سوار قبیل را بر خط عمود O انجام دهیم و محل تقاطع خطوط را A و B بنا کنیم - در این صورت نقطه‌ی A (به فاصله ۲ سانتی متری از وصله زاویه) و نقطه‌ی B (به فاصله ۴ سانتی متری از وصله زاویه) درست ما آید. طبق ویژگی‌های زاویه‌ی نقطه‌ی A و B از وصله زاویه به یک فاصله‌اند. پس ابتدا پارچه خط AB آماده بکنیم از نقطه‌ی O می‌گذرد، نیمساز زاویه O را رسم کنید.

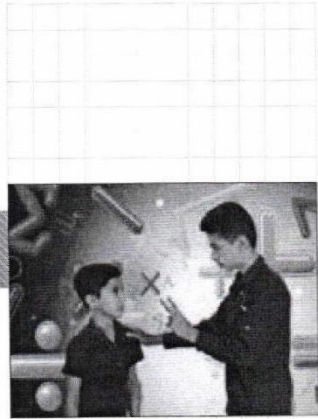


اهتمام ادبی (واحد آزمون‌های آنلاین)

<https://exam.ehtemadadabi.ir>

درس دوم

### استدلال



شیوه درست استدلال در زندگی هر فرد و نیز در جامعه انسانی اهمیت فراوانی دارد. استدلال نادرست در بسیاری مواقع، نتیجه‌گیری‌های غلط، تیره‌شدن روابط، ایجاد باورهای نادرست و پیامدهای خطرناک فردی و اجتماعی دیگری را در پی خواهد داشت و حتی ممکن است به ایجاد مشکلات شخصیتی در افراد بینجامد. ممکن است فردی با استدلال‌هایی این‌گونه، همواره راه موفقیت را بر خود بسته ببیند:

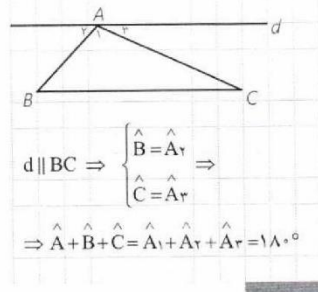
– من در اولین امتحانم موفق نشدم، پس در امتحان‌های بعدی نیز موفق نخواهم شد.

– تیم مورد علاقه من از ابتدای فصل در تمام بازی‌هایش شکست خورده است، پس در بازی آینده نیز شکست خواهد خورد.

### استقرا و استنتاج

در سال‌های قبل تاحدی با استدلال و اثبات آشنا شدید. نوعی از استدلال، که با آن روبه‌رو شدید به این صورت بود که از مشاهدات و بررسی موضوعی در چند حالت، نتیجه‌ای کلی در آن موضوع گرفته می‌شود یا به اصطلاح «از جزء به کل می‌رسیم». البته با چنین استدلالی نمی‌توان همواره به درستی نتیجه گرفته شده مطمئن بود. به‌طور مثال اگر فردی با مشاهده اینکه سه نفر از افراد یک کلاس به رنگ سبز علاقه دارند، نتیجه‌گیری کند که همه افراد آن کلاس به رنگ سبز علاقه دارند، فرد مورد نظر از استدلال استقرایی استفاده کرده است.

نوع دیگری از استدلال که با آن آشنا شدید، براساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایه واقعیت‌هایی است که درستی آنها را پذیرفته‌ایم و به آن استدلال استنتاجی گفته می‌شود. به‌طور مثال با دانستن رابطه بین خطوط موازی و مورب و زوایای بین آنها، اثبات اینکه مجموع زوایای داخلی یک مثلث  $180^\circ$  است به طریق مقابل، یک استدلال استنتاجی است که با نمادهای ریاضی نوشته شده است. توجه کنید که استدلال استنتاجی را به صورت کلامی نیز می‌توان انجام داد.





فعالیت

به استدلال‌هایی که دو دانش‌آموز برای مسئله زیر ارائه داده‌اند، دقت کنید و در مورد میزان اعتبار هر یک از آنها گفت‌وگو کنید.

مسئله: مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب  $360^\circ$  است.

پیمان: در تمام چهارضلعی‌های مربع، مستطیل، لوزی و متوازی‌الاضلاع با توجه به اینکه زاویه‌های مجاور مکمل یکدیگرند به سادگی ثابت می‌شود که مجموع زوایای داخلی آنها  $360^\circ$  است. بنابراین مجموع زوایای داخلی هر چهارضلعی محدب  $360^\circ$  است.

پیمان: می‌دانیم مجموع زوایای داخلی هر مثلث  $180^\circ$  است. یک چهارضلعی دلخواه مانند ABCD در شکل مقابل را در نظر می‌گیریم و دو رأس مقابل آن، مثلاً D و B را به هم وصل می‌کنیم.

مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی ABCD با مجموع زاویه‌های داخلی دو مثلث  $\triangle ABD$  و  $\triangle BCD$  برابر است؛ بنابراین مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی ABCD برابر است با  $360^\circ$ .

پیمان ادعا می‌کند که با این استدلال ثابت می‌شود که مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی برابر  $360^\circ$  است. آیا به نظر شما این ادعای او درست است؟

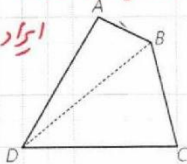
آیا همین استدلال را برای هر چهارضلعی دیگری که به شما بدهند، می‌توانید به کار ببرید؟ اگر جواب شما مثبت است، پس این ویژگی را که «مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی ABCD در مسئله قبل برابر  $360^\circ$  است»، به سایر چهارضلعی‌های محدب می‌توان تعمیم داد.

– نوع استدلال ارائه‌شده توسط هر کدام از دانش‌آموزان را بیان کنید.

مثال: می‌دانیم که هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است و هر نقطه که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد، روی عمود منصف آن پاره خط قرار دارد.

حال با کامل کردن استدلال استنتاجی بیان شده نتیجه بگیرید که سه عمود منصف اضلاع هر مثلث هم‌س‌اند (در یک نقطه به هم می‌رسند).

در استدلال پیمان فقط چهارضلعی‌ها خاص در نظر گرفته شده است. بنابراین ایراد دارد.



استدلال پیمان از کسب به جزئی است و کاملاً درست محاسبه شد.

پیمان: استدلال استقرایی (از جزئی به کل)  
پیمان: استدلال استنباطی (از کل به جزئی)

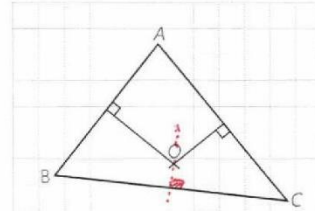


استدلال: مثلث دلخواه ABC در شکل مقابل را در نظر می‌گیریم. چون پاره‌های AB و AC متقاطع اند، عمود منصف‌های آنها نیز در نقطه‌ای مانند O متقاطع اند.

۱- نقطه O روی عمود منصف پاره خط AC است؛ بنابراین  $OA = OC$

۲- نقطه O روی عمود منصف پاره خط AB است؛ بنابراین  $OA = OB$

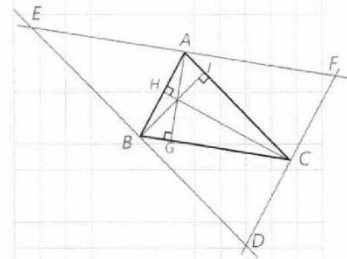
از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:  $OB = OC$ . بنابراین نقطه O روی عمود منصف پاره خط BC قرار دارد. در نتیجه نقطه O محل برخورد عمود منصف‌ها اضلاع مثلث ABC است.



مثال: استدلال استنتاجی زیر را کامل کنید و نتیجه بگیرید که سه ارتفاع هر مثلث هم‌رس‌اند.

استدلال: مثلث دلخواه ABC را در نظر بگیرید و از هر رأس آن خطی به موازات ضلع مقابل به آن رأس رسم کنید تا مطابق شکل مقابل مثلثی مانند DEF به وجود آید.

چهارضلعی ABCF چه نوع چهارضلعی‌ای است؟ چرا؟ **موازی الاضلاع، چهارضلعی متقابل موازیست.**



بنابراین  $BC = AF$  ①

چهارضلعی ACBE چه نوع چهارضلعی‌ای است؟ چرا؟ **موازی الاضلاع، چهارضلعی متقابل موازیست.**

بنابراین  $BC = AE$  ②

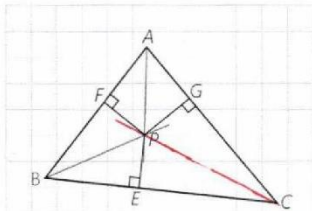
از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:  $AF = AE$ . بنابراین نقطه A وسط پاره خط EF است.

$$\left. \begin{array}{l} AG \perp BC \\ BC \parallel EF \end{array} \right\} \Rightarrow AG \parallel EF$$

لذا خط AG **عمود** پاره خط EF است. به‌طور مشابه می‌توان نشان داد: پاره خط BI **عمود** پاره خط DE است. پاره خط CH **عمود** پاره خط DF است.

بنابراین، ارتفاع‌های مثلث ABC، روی عمود منصف‌های اضلاع مثلث DEF هستند و در نتیجه هم‌رسند.

مثال: می‌دانیم که هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد. حال با کامل کردن استدلال استنتاجی بیان شده نتیجه بگیرید که نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث هم‌رس‌اند.



استدلال: مثلث دلخواه ABC در شکل مقابل را در نظر می‌گیریم. نیمسازهای زوایای A و B مانند شکل یکدیگر را در نقطه‌ای مانند P قطع می‌کنند. از نقطه P، مانند شکل سه عمود به اضلاع مثلث رسم می‌کنیم.

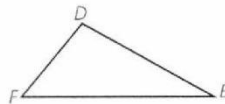
۱- نقطه P روی نیمساز زاویه A است؛ بنابراین  $PF = PG$  ...

۲- نقطه P روی نیمساز زاویه B است؛ بنابراین  $PF = PE$  ...

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:  $PG = PE$ . بنابراین نقطه P روی نیمساز زاویه C است. در نتیجه نقطه P محل برخورد نیمسازها و مراکز دایره‌های مثلث ABC است.

فعالیت

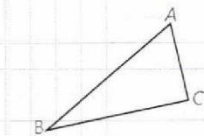
به مثلث‌های زیر دقت کنید. در سطر اول جدول، نام اضلاع مثلث را به ترتیب از بزرگ به کوچک و در سطر دوم، نام زاویه‌های مثلث را نیز به ترتیب از بزرگ به کوچک بنویسید.



اضلاع	EF	DE	DF
زاویه‌ها	D	F	E



اضلاع	GH	HI	GI
زاویه‌ها	I	G	H



اضلاع	AB	BC	AC
زاویه‌ها	C	A	B

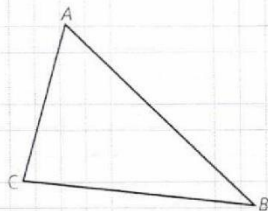
چه رابطه‌ای بین هر ضلع و زاویه زیر آن وجود دارد؟  
با توجه به این رابطه درباره یک مثلث دلخواه چه حدسی می‌توان زد؟ در هر مثلث زاویه بزرگتری، روبرو به ضلع بزرگتری است.  
برای رسیدن به این حدس از چه نوع استدلالی استفاده کردید؟ استقرایی  
آیا با این استدلال می‌توان مطمئن بود که حدس مورد نظر درست است؟ خیر، نمی‌توان از نتیجه بدست آمده مطمئن کرد.

مسئله: اگر در مثلثی دو ضلع نایر برابر باشند،

زاویه روبرو به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از زاویه روبرو به ضلع کوچک‌تر.

استدلال: برای واضح شدن مطلب و کمک به حل مسئله، شکل مثلث را رسم می‌کنیم. آیا می‌توان هر نوع مثلث دلخواهی کشید؟ مانند آنچه در مسئله گفته شده است، مثلثی می‌کشیم که دو ضلع نایر برابر داشته باشد و ویژگی خاص دیگری نداشته باشد.

فرض:  $AB > AC$   
حکم:  $\hat{C} > \hat{B}$





## اهتمام ادبی (واحد آزمون‌های آنلاین)

<https://exam.ehtemadadabi.ir>

### یاد آوری

- ۱- در مثلث متساوی الساقین زوایای روبه‌رو به ساق‌ها با هم برابرند.
- ۲- اندازه هر زاویه خارجی یک مثلث برابر است با مجموع اندازه‌های دو زاویه داخلی غیرمجاورش. بنابراین هر زاویه خارجی مثلث از هر زاویه داخلی غیرمجاورش بزرگ‌تر است.

می‌دانیم طبق فرض  $AB > AC$  است؛ لذا می‌توانیم نقطه  $D$  را روی  $AB$  جایی انتخاب کنیم که  $AC = AD$

★ اندازه زاویه‌های  $C$  و  $C_1$  نسبت به هم چگونه‌اند؟  $\hat{C} \triangleright \hat{C}_1$

مثلث  $ADC$  چه نوع مثلثی است؟ **مساوی الساقین**

★ ★ اندازه زاویه‌های  $C_1$  و  $D_1$  نسبت به هم چگونه‌اند؟  $\hat{C}_1 \equiv \hat{D}_1$

زاویه  $D_1$  چه نوع زاویه‌ای برای مثلث  $DBC$  است؟ **خارجی**

★ ★ ★ اندازه زاویه‌های  $D_1$  و  $B$  نسبت به هم چگونه‌اند؟  $\hat{D}_1 \triangleright \hat{B}$

از ★ و ★ ★ و ★ ★ ★ چه نتیجه‌ای درباره اندازه زاویه‌های  $B$  و  $C$  می‌توان گرفت؟

$\hat{C} \triangleright \hat{B}$

همان‌طور که مشاهده کردید در مثلثی مانند  $\triangle ABC$  فرض کردیم که ضلع  $AB > AC$  است و نشان دادیم: زاویه روبه‌رو به  $AC >$  زاویه روبه‌رو به  $AB$  است.

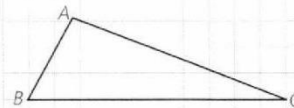
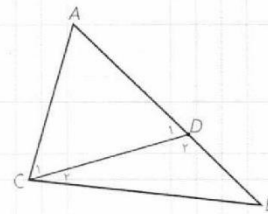
چرا می‌توان این موضوع را درباره تمام مثلث‌هایی که دو ضلع نابرابر دارند، پذیرفت؟

**زیرا این اثبات مبتنی بر واقعیت‌هایی است که درستی آنها را قبول داریم، می‌توانیم به سادگی (استدلال مستقیم) برخی نتایج مهم و پرکاربرد که مانند مسئله قبل با استدلال استنتاجی به دست می‌آید، قضیه نامیده می‌شود.**

**قضیه ۱:** اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویه روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از زاویه روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر.

فرض:  $AB < AC$   
حکم:  $\hat{C} < \hat{B}$

– بار دیگر به آنچه انجام شد، دقت کنید. بررسی اندازه‌های اضلاع و زوایای مثلث‌های مختلف، دقت در کشف رابطه میان این اندازه‌ها، حدس در برقراری رابطه‌ای خاص، طرح مسئله، اثبات درستی مسئله و نهایتاً نتیجه‌گیری.





اهتمام ادبی (واحد آزمون‌های آنلاین)

[https://exam.ehtemadabi.ir](https://exam.ehtemadadabi.ir)

بسیاری از نتایج ریاضی، طی چنین مراحل طی توسط علاقه‌مندان به ریاضی به دست آمده است. مراحل این روند و حتی حدس‌ها و تفکراتی که درست نیست اما در این مراحل صورت می‌گیرد، می‌تواند موجب ارتقای تفکر ریاضی شود.

اگر در یک قضیه، جای فرض و حکم را عوض کنیم به آنچه حاصل می‌شود «عکس قضیه» گفته می‌شود. عکس یک قضیه ممکن است درست یا نادرست باشد.

به طور مثال عکس قضیه ۱ به صورت زیر است:

**عکس قضیه ۱:** اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویه بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویه کوچک‌تر.

فرض:  $\hat{C} < \hat{B}$   
حکم:  $AB < AC$

مثال:

**قضیه:** اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آنگاه قطرهایش یکدیگر را نصف می‌کنند.

**عکس قضیه:** اگر در یک چهارضلعی قطرهای یکدیگر را نصف کنند، آنگاه آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

مثال:

**قضیه:** اگر دو ضلع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه ارتفاع‌های وارد بر آن دو ضلع نیز با هم برابرند.

فرض:  $AB = AC$

حکم:  $BH = CH'$

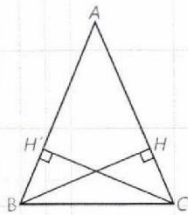
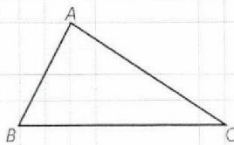
**عکس قضیه:** اگر دو ارتفاع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه اضلاع نظیر به آن ارتفاع‌ها نیز با هم برابرند.

فرض:  $BH = CH'$

حکم:  $AB = AC$

درواقع معمولاً برای نوشتن عکس قضیه، قسمت اصلی فرض، که حکم از آن ناشی می‌شود با حکم جابه‌جا می‌شود؛ مثلاً در مثال قبل مثلث بودن  $ABC$  و ارتفاع بودن  $BH$  و  $CH'$  در خود قضیه و عکس آن جزء مفروضات است.

عکس قضیه ۱ در صفحات بعد اثبات شده است.





اهتمام ادبی (واحد آزمون‌های آنلاین)

<https://exam.ehtemameadabi.ir>

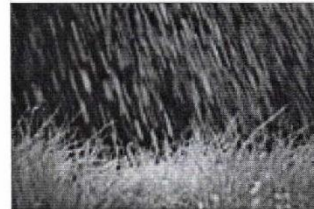
گزاره یک جمله خبری است که دقیقاً درست یا نادرست باشد؛ اگرچه درست یا نادرست بودن آن بر ما معلوم نباشد. گزاره می‌تواند تنها یک خبر را اعلام کند که به آن گزاره ساده می‌گویند و می‌تواند بیش از یک خبر را اعلام کند و ترکیبی از چند گزاره ساده باشد که به آن گزاره مرکب می‌گویند؛ مثلاً گزاره‌های «فردا هوا بارانی است» و «پانزده عددی اول است»، هرکدام یک گزاره ساده است و «فردا هوا بارانی و پانزده یک عدد اول است» یک گزاره مرکب است.

جمله‌های زیر مثال‌هایی از گزاره است :

– مجموع زوایای داخلی هر مثلث  $180^\circ$  درجه است.  
–  $3 < 2$

جمله‌های زیر گزاره نیست :

– آیا فردا هوا بارانی است؟  
– چه هوای خوبی!  
– کتابت را مطالعه کن.



نقیض یک گزاره : همان‌طور که گفته شد، ارزش یک گزاره یا درست است و یا نادرست. نقیض یک گزاره مانند مثال‌های زیر ساخته می‌شود و ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش خود گزاره است.

مثال :

الف) گزاره : «a از b بزرگ‌تر است.»

نقیض آن : «چنین نیست که a از b بزرگ‌تر باشد.» که معادل است با «a از b بزرگ‌تر نیست.» و معادل است با «a از b کوچک‌تر و یا با b برابر است.»

ب) گزاره : «مجموع زوایای داخلی هر مثلث  $180^\circ$  است.»

نقیض آن : «چنین نیست که مجموع زوایای داخلی هر مثلث  $180^\circ$  است.» که معادل است با «مثلثی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن  $180^\circ$  نیست.»

پ) گزاره : «یک چهارضلعی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی اش  $360^\circ$  نیست.»

نقیض : «چنین نیست که یک چهارضلعی وجود داشته باشد که مجموع زوایای داخلی اش  $360^\circ$  نیست.» که معادل است با «هر چهارضلعی مجموع زوایای داخلی اش  $360^\circ$  است.»

در برخی گزاره‌ها به جای اینکه درباره چیزی خبری قطعی داده شود، خبری که اعلام می‌شود با یک شرط بیان می‌شود؛ مثلاً «اگر باران بیارد، مسابقه برگزار خواهد شد.» به چنین گزاره‌هایی، گزاره‌های شرطی می‌گویند.



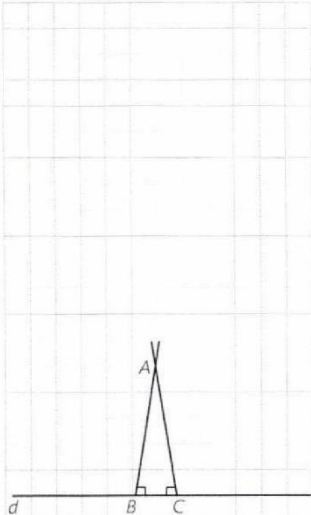


## اهتمام ادبی (واحد آزمون‌های آنلاین)

<https://exam.ehtemadadabi.ir>

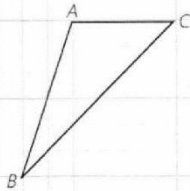
نوعی از استدلال که در مسائل ریاضی و هندسی کاربرد دارد، برهان غیرمستقیم یا برهان خلف است. بدین صورت که به جای اینکه به طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم، فرض می‌کنیم حکم غلط باشد (یا به عبارتی فرض می‌کنیم، نقیض حکم درست باشد) و به یک تناقض یا به یک امر غیرممکن می‌رسیم.

مثال: از یک نقطه غیر واقع بر خط نمی‌توان بیش از یک عمود بر آن خط رسم کرد.  
فرض: نقطه‌ای مانند A غیر واقع بر خطی مانند d وجود دارد.  
حکم: از نقطه A نمی‌توان بیش از یک عمود بر خط d رسم کرد.  
استدلال: با برهان غیرمستقیم فرض می‌کنیم حکم غلط باشد؛ یعنی فرض می‌کنیم از نقطه A دو عمود بر خط d رسم کرده‌ایم که مانند شکل، خط d را در نقاط B و C قطع کرده‌اند. در این صورت مجموع زوایای داخلی مثلث ABC بزرگ‌تر از  $180^\circ$  خواهد شد و این غیرممکن است. پس امکان رسم دو عمود از یک نقطه غیر واقع بر یک خط وجود ندارد؛ یعنی حکم نمی‌تواند غلط باشد.  
حال می‌خواهیم عکس قضیه ۱ را با برهان غیرمستقیم ثابت کنیم.



عکس قضیه ۱: اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع مقابل به زاویه بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویه کوچک‌تر.

برای واضح شدن مسئله و کمک به حل آن، شکل مثلث را رسم می‌کنیم و با استفاده از آن فرض و حکم را می‌نویسیم.



فرض:  $\hat{A} > \hat{B}$   
حکم:  $BC > AC$

اثبات: با برهان غیرمستقیم فرض می‌کنیم حکم... باشد. بنابراین باید  $BC < AC$  یا  $BC = AC$ .

هر دو حالت را جداگانه بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم هر دو حالت به تناقض منجر می‌شود.

حالت اول: اگر  $BC < AC$  باشد، طبق قضیه ۱ باید  $\hat{A} < \hat{B}$ ، که با فرض در تناقض است.

حالت دوم: اگر  $BC = AC$  باشد،  $\hat{A} = \hat{B}$  یک مثلث... خواهد بود و می‌دانیم در این حالت باید  $\hat{A} = \hat{B}$  باشد که در تناقض با فرض است. لذا هر دو حالت  $BC < AC$  و  $BC = AC$  غیرممکن‌اند؛ بنابراین  $BC > AC$  است و حکم درست است.



### قضیه‌های دوشرطی

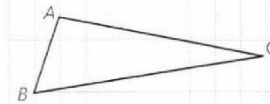
همان گونه که دیدیم، قضیه ۱ و عکس آن هر دو درست است؛ بنابراین می‌توانیم بگوییم که:

اگر در مثلثی، دو ضلع نابرابر باشند، زاویه مقابل به ضلع بزرگتر، بزرگتر است از زاویه مقابل به ضلع کوچکتر، و برعکس.

چنین قضیه‌هایی را «قضیه‌های دوشرطی» می‌نامیم.  
 قضیه‌های دوشرطی را می‌توان با نماد  $\Leftrightarrow$  (اگر و تنها اگر) بیان کرد؛ به‌طور مثال قضیه فوق و عکس آن را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:  
 فرض کنیم  $\triangle ABC$  یک مثلث باشد

$$BC > AB \Leftrightarrow \hat{A} < \hat{C}$$

مثال: در یک مثلث، دو ضلع با هم برابرند؛ اگر و تنها اگر ارتفاع‌های نظیر آنها با هم برابر باشند.



### مثال نقض

نوع دیگری از استدلال که با آن آشنا شده‌اید، استدلال با مثال نقض است. گاهی در برخی موضوعات (چه ریاضی و چه غیرریاضی) یک حکم به‌صورت کلی بیان می‌شود؛ بدین صورت که در مورد تمام اعضای یک مجموعه یک حکم بیان می‌شود. موارد زیر نمونه‌هایی از حکم‌های کلی است:

**الف)** «همه اعداد صحیح، مثبت‌اند.» (حکمی کلی در مورد تمام اعداد صحیح)

**ب)** «هر چهار ضلعی که چهار ضلع برابر داشته باشند، مربع است.» (حکم کلی در مورد تمام چهارضلعی‌هایی که چهار ضلع برابر دارند)

**پ)** «مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب  $360^\circ$  است.» (حکم کلی در مورد تمام چهارضلعی‌های محدب)

**ت)** «به‌ازای هر عدد طبیعی  $n$ ، مقدار عبارت  $n^2 + n + 41$  عددی اول است.» (حکم کلی در مورد تمام اعداد طبیعی)

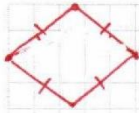
حدس خود را درباره درستی یا نادرستی حکم کلی «الف» بنویسید. چگونه می‌توانید درستی حدس خود را ثابت کنید؟

می‌دانیم که  $(-2)$  یک عدد صحیح و منفی است؛ بنابراین حکم کلی «الف» با ارائه



### اهتمام ادبی (واحد آزمون‌های آنلاین)

<https://exam.ehtemadadabi.ir>



همین مثال رد می‌شود. به چنین مثالی که نشان می‌دهد یک حکم کلی نادرست است، مثال نقض گفته می‌شود. دربارهٔ درستی یا نادرستی «ب» چه می‌توانید بگویید؟ **نادرست. چهارضلعی ممکن است لوزی نباشد.**

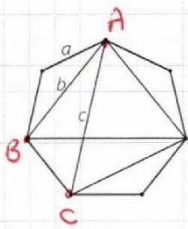
اگر برای یک حکم کلی نتوانیم مثال نقض بیابیم، دربارهٔ درستی یا نادرستی آن حکم چه می‌توان گفت؟ آیا در موارد (ب) و (ت) می‌توانید مثال نقض پیدا کنید؟ **مگر است درست باشد. خیر**

آیا اگر در مورد یک حکم کلی نتوانیم مثال نقض پیدا کنیم، باید درستی آن حکم کلی را نتیجه‌گیری کنیم؟ در مورد (ب) مثال نقض وجود ندارد؛ اما این پذیرش حکم کلی (ب) کافی نیست و باید توجه کرد که «برای نشان دادن درستی یک حکم کلی باید اثبات ارائه کنیم.» دربارهٔ گزینهٔ (ت) چه می‌توان گفت؟ **مثال نقض دارد. اگر  $n=1$  باشد  $n$  انگاره**

**عدد اول نیست**  
$$1 + 1 + 1 = 1(1 + 1 + 1) = 1 \times 3 = 3$$

اگر درستی یک حکم کلی را نتوانیم اثبات کنیم و برای رد آن مثال نقض نیز نتوانیم بیابیم، نمی‌توان دربارهٔ درستی یا نادرستی آن حکم کلی، نتیجه‌ای گرفت.

#### کاردرکلاس



۱- در شکل مقابل نقطه‌ها، رأس‌های یک هفت‌ضلعی منتظم به طول ضلع  $a$  می‌باشند. فاصلهٔ هر رأس از رأس بعدی برابر  $a$  و از دومین رأس بعد از آن برابر  $b$  و از سومین رأس بعد از آن برابر  $c$  است. آیا حکم کلی زیر درست است؟ «با وصل کردن هر سه رأس از این شکل یک مثلث متساوی‌الساقین، به دست می‌آید.»

**خیر: مثلث ABC متساوی‌الساقین نیست.**

۲- آیا حکم‌های کلی زیر درست است؟ چرا؟

$A = \{1, 2\}$

$B = \{3, 4, 5\}$

$A \not\subseteq B$  و  $B \not\subseteq A$

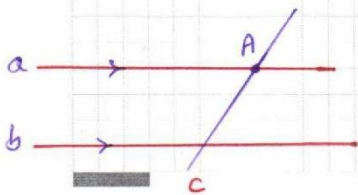
الف) برای هر دو مجموعهٔ  $A$  و  $B$ ، یا  $A \subseteq B$  یا  $B \subseteq A$  **خیر**

ب) هر دو مثلث که مساحت‌های برابر داشته باشند، هم‌نهشت‌اند.

**خیر**  
مسلط اول  $a=8, h=2 \Rightarrow S_1 = \frac{2 \times 8}{2} = 8$

مسلط دوم  $a=12, h=2 \Rightarrow S_2 = \frac{2 \times 12}{2} = 12$

ولی روش‌ها هم نهشت نیستند.



۲۷

۱- می‌دانیم که از یک نقطهٔ خارج از یک خط فقط یک خط به موازات آن می‌توان رسم کرد. حال با برهان خلف ثابت کنید خطی که یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند. **فرض کنیم که خط  $c$  خط  $a$  را قطع نکند**

پس  $c \parallel a$  و این به این معنی است که از نقطه  $A$  دو خط موازی  $a$  رسم شده است و این ممکن نیست. لذا خط  $c$  به خط  $a$  قطع کند.



اهتمام ادبی (واحد آزمون‌های آنلاین)

<https://exam.ehtemadadabi.ir>

۲- با پرهان خلف ثابت کنید اگر در مثلث  $ABC$ ،  $AB \neq AC$ ، آنگاه  $\hat{B} \neq \hat{C}$ .  
فرض کنیم  $\hat{B} = \hat{C}$  لذا باید  $AB = AC$  باشد و این مخالف فرضی است.

۳- گزاره‌های زیر را اثبات یا رد کنید.

الف) در هر مثلث، اندازه بزرگ‌ترین زاویه، از چهار برابر اندازه کوچک‌ترین زاویه، کوچک‌تر است.

ب) در هر مثلث، هر ارتفاع از هر کدام از سه ضلع مثلث کوچک‌تر است.

۴- با استدلال استنتاجی ثابت کنید مجموع زاویه‌های داخلی هر  $n$  ضلعی محدب برابر است با  $180^\circ \times (n-2)$ .

۵- نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید.

- الف) هر لوزی یک مربع است. **هر لوزی یک مربع نیست.**
- ب) مستطیلی وجود دارد که مربع نیست. **مستطیلی وجود دارد که مربع است.**
- پ) هیچ مثلثی بیش از یک زاویه قائمه ندارد. **همه مثلث‌ها بیش از یک زاویه قائمه دارند.**
- ت) مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب برابر  $360^\circ$  است. **مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب برابر  $360^\circ$  نیست.**

۶- عکس هر یک از قضایای زیر را بنویسید و سپس آنها را به صورت یک قضیه دوشرطی بنویسید.

الف) در هر مثلث، اگر دو ضلع برابر باشند، دو زاویه روبه‌رو به آنها نیز برابرند.

ب) اگر یک چهارضلعی لوزی باشد، قطرهایش عمود منصف یکدیگرند.

پ) در هر مثلث، اگر سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز با هم برابرند.

ت) اگر دو دایره شعاع‌های برابر داشته باشند، آنگاه مساحت‌های برابر نیز دارند.

**فصلی: اگر دو زاویه روبه‌رو در دو ضلع برابر باشند آنگاه آن دو ضلع برابرند.**

**فصلی دوشرطی: در هر مثلث اگر دو ضلع برابر باشند، زاویه‌های روبه‌رو برابرند.**

**ب) اگر دو ضلع نیز برابرند و برعکس.**

**ب) اگر قطرها یک چهارضلعی عمود منصف هم‌دیگر باشند آنگاه آن چهارضلعی لوزی است.**

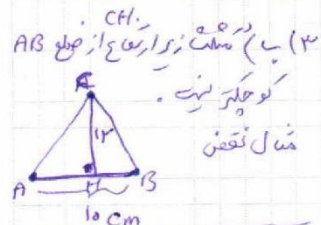
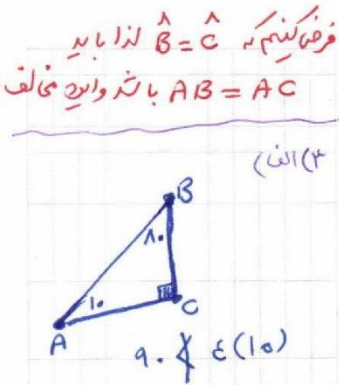
**فصلی دوشرطی: یک چهارضلعی لوزی است اگر دو ضلع آن قطرها عمود منصف هم‌دیگر باشند.**

**پ) در هر مثلث اگر سه زاویه مساوی باشند آنگاه سه ضلع مساویند.**

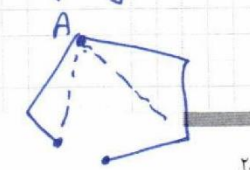
**فصلی دوشرطی: اگر سه ضلع مثلثی برابر باشند آنگاه سه زاویه برابرند.**

**ت) اگر دو دایره مساحت‌های برابر داشته باشند آنگاه شعاع‌های آنها برابرند.**

**فصلی دوشرطی: اگر دو دایره شعاع‌های برابر داشته باشند آنگاه مساحت‌های آنها برابرند و برعکس.**



۱۳- در یک  $n$  ضلعی محدب اگر  $n$  راس معین را  $A$  بنامیم از این راس  $n-3$  قطر می‌گذرد (چرا؟) و لذا  $(n-3) + 1 = n-2$  مثلث متقابل ایجاد می‌شود. مجموع زاویه‌های داخلی این مثلث‌ها معین  $(n-2) \times 180^\circ$  برابر مجموع زاویه‌های داخلی  $n$  ضلعی محدب است.





اهتمام ادبی (واحد آزمون‌های آنلاین)  
<https://exam.ehtemadadabi.ir>

۴

فصل دوم

### قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن



قضیه تالس و تشابه شکل‌های هندسی، کاربردهای زیادی در محاسبه طول‌ها و فاصله‌های غیر قابل دسترس دارد. محاسبه ارتفاع بلندی‌ها به کمک سایه آنها نمونه‌ای از این کاربردهاست.



درس اول

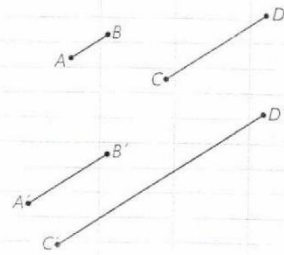
### نسبت و تناسب در هندسه

با نسبت و تناسب آشنایی دارید و ویژگی اصلی آن، یعنی برابری حاصل ضرب طرفین و وسطین را می‌شناسید؛ یعنی می‌دانید که اگر  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  (ب، d ≠ 0) آنگاه  $ad = bc$  و برعکس؛ از تساوی  $xy = zt$  با شرط  $t, y \neq 0$  تناسب  $\frac{x}{t} = \frac{z}{y}$  نتیجه می‌شود. نسبت اندازه‌های دو پاره‌خط در هندسه هم به همین صورت تعریف می‌شود به شرطی که هر دو با یک واحد اندازه‌گیری بیان شده باشند؛ مثلاً اگر AB پاره‌خطی به طول ۲cm و CD پاره‌خطی به طول ۵cm باشد،  $\frac{AB}{CD} = \frac{2}{5}$ . حال فرض کنید  $A'B' = 4cm$  و  $C'D' = 10cm$  در این صورت

$$\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

و بنابراین یک تناسب به صورت  $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$  درست می‌شود. بدیهی است که اگر نسبت AB به CD،  $\frac{2}{5}$  باشد، نسبت AB به  $\frac{5}{2}$  است.

کفر نسبت و تناسب لازم است.



#### فعالیت ۱

مثلث ABC و ارتفاع‌های BD و CE از آن را در نظر بگیرید. مساحت مثلث ABC را یک بار با در نظر گرفتن قاعده AC و ارتفاع BD و بار دیگر با در نظر گرفتن قاعده AB بنویسید.

$$\text{مساحت } ABC = \frac{1}{2} AC \times BD$$

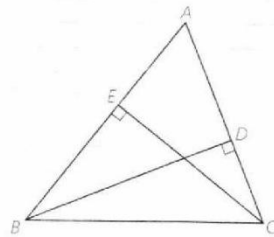
$$\text{مساحت } ABC = \frac{1}{2} AB \times CE$$

عبارت‌های سمت راست، هر دو مساوی یک چیزند.

بنابراین  $AC \times BD = AB \times CE$  آیا می‌توانید از آنجا یک تناسب بنویسید؟

پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید. آیا همه به یک جواب رسیده‌اید؟ تفاوت پاسخ‌ها چه چیزی را نشان می‌دهد؟

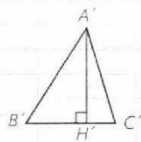
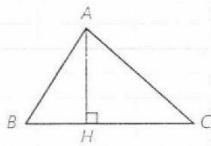
$$\frac{AC}{CE} = \frac{AB}{BD} \quad \text{و} \quad \frac{BD}{CE} = \frac{AB}{AC}$$





با توجه به فعالیت بالا، جای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

در هر مثلث، نسبت اندازه‌های هر دو ضلع، با عکس نسبت  $\frac{a}{b}$  ... وارد بر آنها برابر است.



**۲ فعالیت**

در شکل مقابل ارتفاع‌های AH و A'H' در دو مثلث ABC و A'B'C' هم اندازه‌اند ( $AH = A'H'$ ) با پرکردن جاهای خالی و انجام عملیات ریاضی، نتیجه زیر را به دست آورید.

$S_{ABC} = ABC$  مساحت  $= \frac{1}{2} AH \times BC$

$S_{A'B'C'} = \frac{1}{2} A'H' \times B'C'$

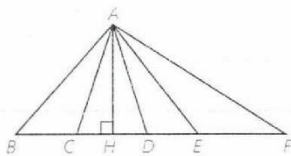
$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2} AH \times BC}{\frac{1}{2} A'H' \times B'C'} = \frac{BC}{B'C'}$

**۱ نتیجه**

هرگاه اندازه ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشد، نسبت مساحت‌های آنها برابر با نسبت اندازه قاعده‌هایی است که این ارتفاع‌ها بر آنها وارد شده است.

**کاردرکلاس**

در شکل مقابل مثلث‌های ABC، ACD، ADE و AEF را که در رأس A مشترک‌اند، در نظر بگیرید. ارتفاع منظر با رأس A همه این مثلث‌ها کدام پاره‌خط است؟



با توجه به نتیجه فعالیت (۲) جاهای خالی را پر کنید:

$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}} = \dots$        $\frac{S_{ACD}}{S_{AEF}} = \dots$        $\frac{S_{ACE}}{S_{ABF}} = \dots$

$\frac{\frac{1}{2} AH \times BC}{\frac{1}{2} AH \times CD}$        $\frac{\frac{1}{2} AH \times CD}{\frac{1}{2} AH \times EF}$        $\frac{\frac{1}{2} AH \times CE}{\frac{1}{2} AH \times BF}$

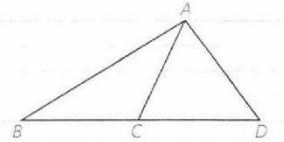
$\frac{BC}{CD}$  ،  $\frac{CD}{EF}$  ،  $\frac{CE}{BF}$



نتیجه ۲

اگر دو مثلث در یک رأس مشترک بوده و قاعده مقابل به این رأس آنها روی یک خط راست باشد، نسبت مساحت‌های آنها برابر با نسبت اندازه قاعده‌های آنهاست. مثلاً در شکل روبه‌رو:

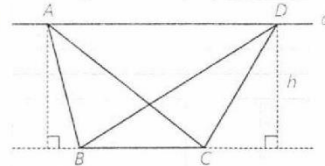
$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}} = \frac{\text{مساحت } ABC}{\text{مساحت } ACD} = \frac{BC}{CD}$$



کاردرکلاس

در شکل روبه‌رو خط  $d$  با  $BC$  موازی است. چرا ارتفاع‌های وارد بر قاعده  $BC$  در مثلث‌های  $ABC$  و  $DBC$  با هم برابر است؟ اگر طول این ارتفاع‌ها را  $h$  بنامیم و طول  $BC$  را با  $a$  نمایش دهیم، مساحت این مثلث‌ها چقدر است؟

$$\frac{1}{2} h \times a$$



نتیجه ۳

اگر دو مثلث، قاعده مشترکی داشته باشند و رأس‌های روبه‌روی این قاعده آنها، روی یک خط موازی این قاعده باشند، این مثلث‌ها هم‌مساحت‌اند. مثلاً در شکل بالا مثلث‌های  $ABC$ ،  $DBC$  هم‌مساحت‌اند.

ویژگی‌های تناسب

به کمک اعمال و روش‌های جبری می‌توان از هر تناسب، تناسب‌ها یا تساوی‌های دیگری را نتیجه گرفت. مهم‌ترین این ویژگی‌ها به شرح زیر است (اثبات درستی این ویژگی‌ها را در مجله ریاضی انتهای فصل می‌توانید ببینید)

۱	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$	$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} \Leftrightarrow 3 \times 10 = 5 \times 6$	$b$ و $d \neq 0$	(طرفین وسطین کردن)
۲	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$	$\frac{2}{5} = \frac{4}{10} \Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{10}{4}$	$a$ و $b$ و $c$ و $d \neq 0$	(معکوس کردن طرفین تناسب)
۳	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ یا $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$	$\frac{2}{3} = \frac{6}{9} \Rightarrow \frac{9}{3} = \frac{6}{2}$	$a$ و $b$ و $c$ و $d \neq 0$	(عوض جای طرفین یا وسطین)
۴	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ یا $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$	$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{4}{10}$	$b$ و $d \neq 0$	(ترکیب نسبت در صورت یا مخارج)
۵	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{e-d}{d}$ یا $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{e-d}$	$\frac{30}{21} = \frac{20}{14} \Rightarrow \frac{9}{21} = \frac{6}{14}$	$b$ و $d \neq 0$	(تفصیل نسبت در صورت یا مخارج)
۶	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	$\frac{4}{6} = \frac{8}{12} \Rightarrow \frac{12}{18} = \frac{8}{12} = \frac{4}{6}$	$b$ و $d \neq 0$	



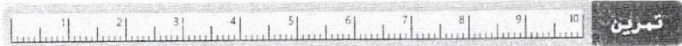


اهتمام ادبی (واحد آزمون‌های آنلاین)

<https://exam.ehtemameadabi.ir>

$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} \Rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$	$b_1 \neq 0, b_2 \neq 0, \dots, b_n \neq 0$ (تعمیم ویژگی ۶)
$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{2+4+6+8}{3+6+9+12} = \frac{20}{30}$	

تعریف واسطه (میانگین) هندسی: اگر طرفین یا وسطین یک تناسب شامل دو عدد برابر باشد؛ یعنی  $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$  یا  $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$  با طرفین وسطین کردن تناسب، نتیجه می‌شود:  $b^2 = ac$ . در این صورت  $b$  را واسطه هندسی  $a$  و  $c$  می‌نامیم. مثلاً اگر دو پاره‌خط به طول‌های ۴ و ۹ واحد داشته باشیم، پاره‌خطی که ۶ واحد طول دارد، واسطه هندسی بین آنهاست (چرا؟)



$$\frac{x+y+z}{2+3+4} = \frac{r}{5} \Rightarrow x+y+z = \frac{2r}{5}$$

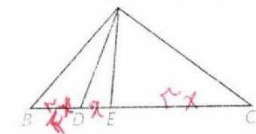
۱- اگر  $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{r}{5}$  حاصل  $x+y+z$  را به دست آورید.

$$x^2 = 10 \times 1 \rightarrow x^2 = 10 \rightarrow x = \sqrt{10}$$

۲- طول پاره‌خطی را به دست آورید که واسطه هندسی بین دو پاره‌خط به طول‌های ۸ و ۱۰ سانتی متر است.

$$\frac{2\sqrt{10} \times 4}{x} = 2\sqrt{10} = 5 \Rightarrow 8\sqrt{10} = 5x \Rightarrow x = \frac{8\sqrt{10}}{5}$$

۳- طول‌های اضلاع مثلثی ۴ و ۶ و ۸ سانتی مترند و بلندترین ارتفاع آن  $\frac{2\sqrt{15}}{3}$  سانتی متر است. طول‌های دو ارتفاع دیگر مثلث را به دست آورید.



۴- در شکل مقابل مساحت مثلث ACE سه برابر مساحت مثلث ADE و دو برابر

مساحت مثلث ABD است. نسبت‌های  $\frac{BC}{DE}$  و  $\frac{BD}{AD}$  را به دست آورید.

$$S_{ACE} = 3 S_{ADE} \rightarrow \frac{1}{2} AH \times CE = 3 \times \frac{1}{2} AH \times DE \rightarrow CE = 3 DE$$

$$S_{ACE} = 2 S_{ADB} \rightarrow \frac{1}{2} AH \times CE = 2 \times \frac{1}{2} AH \times BD \rightarrow CE = 2 BD$$

۵- در شکل مقابل  $d \parallel d'$  و مساحت مثلث ABC،  $16 \text{ cm}^2$  است. اگر  $BD = 6 \text{ cm}$

باشد، فاصله نقطه C از BD را به دست آورید.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC = 16$$

$$S_{BDC} = \frac{1}{2} AH \times BD = 16 \rightarrow AH = \frac{16}{3}$$

$$\frac{BC}{DE} = \frac{\frac{16}{3}}{x} = \frac{16}{3x}$$

$$\frac{DE}{BD} = \frac{x}{\frac{16}{3}} = \frac{3x}{16}$$

از دو معادله



درس دوم

### قضیه تالس

در شکل مقابل خط DE موازی ضلع BC رسم شده است. مثلث‌های DAE و DEC در رأس D مشترک‌اند. قاعده‌های مقابل به این رأس کدام‌اند؟ با توجه به نتیجه ۱ از درس اول، تناسب‌های زیر را کامل کنید:

$$\frac{S_{DAE}}{S_{DEC}} = \frac{AE}{EC}, \frac{S_{ADE}}{S_{DBE}} = \frac{AD}{DB}$$

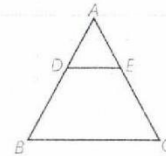
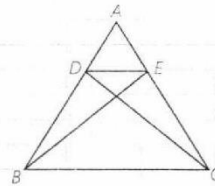
مثلث‌های DBE و DEC هم‌مساحت‌اند (چرا؟) با توجه به این موضوع از تساوی‌های بالا تناسب زیر را نتیجه‌گیری کنید:

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$$

بنابراین قضیه زیر را اثبات کردیم:

**قضیه تالس:** هرگاه در یک مثلث، خطی موازی یکی از اضلاع، دو ضلع دیگر مثلث را در دو نقطه قطع کند، روی آن دو ضلع، چهار پاره‌خط جدا می‌کند که اندازه‌های آنها تشکیل یک تناسب را می‌دهند. به طور خلاصه هرگاه مانند شکل روبه‌رو داشته باشیم  $DE \parallel BC$ ، آنگاه:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$



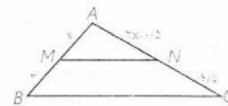
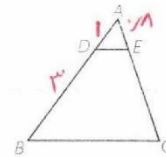
### کاردر کلاس

۱- در شکل مقابل  $DE \parallel BC$  و  $AD=1$  و  $DB=3$  و  $AE=4$ ، به کمک قضیه

$$\frac{1}{3} = \frac{4}{EC} \rightarrow EC = 12, AC = 16$$

۲- در شکل مقابل  $MN \parallel BC$ : به کمک قضیه تالس و با تشکیل یک معادله، مقدار x را به دست آورید.

$$\frac{x}{15} = \frac{2x-10}{15} \rightarrow 15x = 2x - 10$$
$$13x = 15$$
$$x = \frac{15}{13}$$

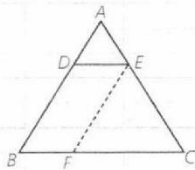
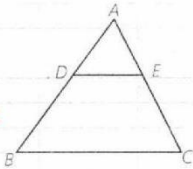




$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

$$\frac{AD}{AD+DB} = \frac{AE}{AE+EC}$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$



۳- در شکل مقابل  $DE \parallel BC$ : تناسب قضیه تالس را بنویسید و به کمک ترکیب نسبت در مخرج، رابطه  $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$  و با تفصیل نسبت در صورت از این تناسب، رابطه  $\frac{DB}{AB} = \frac{CE}{AC}$  را نتیجه بگیرید. این رابطه‌ها صورت‌های دیگر قضیه تالس هستند.

فعالیت ۱

در شکل مقابل  $DE \parallel BC$ ، از نقطه E، پارده خط EF موازی AB رسم کرده‌ام. چهارضلعی DEFB چه نوع چهارضلعی است؟ چرا؟  
با توجه به این موضوع داریم:

$$DE = BF, \quad DB = EF$$

در مثلث ABC و با در نظر گرفتن  $DE \parallel BC$ ، قضیه تالس را بنویسید.

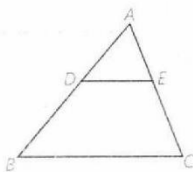
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad (1)$$

در مثلث CAB با توجه به  $EF \parallel AB$ ، قضیه تالس را بنویسید.

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} \quad (2)$$

با توجه به روابط (۱) و (۲) و جای‌گذاری DE به جای BF خواهیم داشت:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$



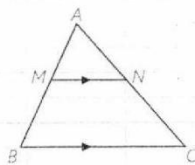
تعمیم قضیه تالس: اگر خطی دو ضلع مثلثی را در دو نقطه قطع کند و با ضلع سوم آن موازی باشد، مثلثی پدید می‌آید که اندازه ضلع‌های آن با اندازه ضلع‌های مثلث اصلی متناسب‌اند؛ مثلاً در شکل روبه‌رو داریم:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

کاردرنگ

در شکل مقابل، با فرض  $MN \parallel BC$ ، طبق قضیه تالس داریم:  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$  حال عکس قضیه تالس را به زبان ریاضی بنویسید.

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow MN \parallel BC$$





اهتمام ادبی (واحد آزمون‌های آنلاین)

<https://exam.ehtemadadabi.ir>

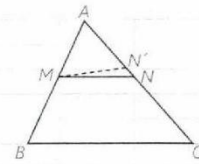
عکس قضیه تالس: اگر خطی دو ضلع مثلثی را قطع کند و روی آنها، چهار پاره‌خط با اندازه‌های متناظراً متناسب جدا کند، آن‌گاه با ضلع سوم مثلث موازی است.

اثبات با برهان خلف است. در شکل می‌دانیم:

فرض کنیم بر خلاف حکم  $MN \parallel BC$ ، پس از نقطه M پاره‌خط  $MN'$  را موازی BC رسم می‌کنیم. حال با توجه به قضیه تالس داریم:

$$MN' \parallel BC \Rightarrow \frac{AN'}{AC} = \frac{AM}{AB}$$

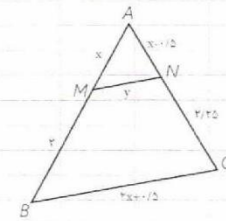
از مقایسه این تناسب، با فرض مسئله نتیجه می‌شود  $\frac{AN'}{AC} = \frac{AN}{AC}$  و در نتیجه:  $AN' = AN$  و بنابراین N بر N' منطبق است و MN همان  $MN'$  است که موازی BC است.



مثال: در شکل مقابل  $MN \parallel BC$  است، مقادیر x و y را به دست آورید.

حل: با توجه به قضیه تالس و تعمیم آن داریم:

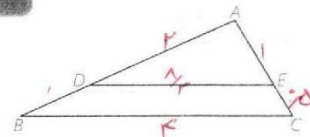
$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{x-1/5}{2/25} \Rightarrow 2/25x = 3x - 1/5 \Rightarrow -75x = 1/5 \Rightarrow x = 2$$
$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{y}{4/5} \Rightarrow y = 1/8$$



تسری

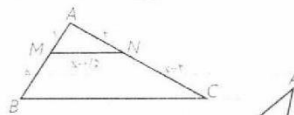
۱- در شکل مقابل  $DE \parallel BC$ : با توجه به اندازه پاره‌خط‌ها، طول‌های DE و AB را به دست آورید.

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \frac{1}{10} = \frac{1}{AB} \rightarrow AB = 10$$
$$\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{1}{10} = \frac{2}{AC} \rightarrow AC = 20$$



۲- در شکل مقابل، اگر  $MN \parallel BC$ : مقدار x را به دست آورید و سپس طول BC را نیز بیابید.

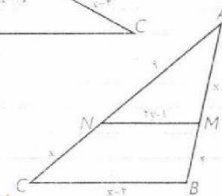
$$\frac{1}{x} = \frac{2}{x+2} \rightarrow x+2=2x \rightarrow x=2$$
$$\frac{1}{2} = \frac{2/5}{BC} \rightarrow BC = 10$$

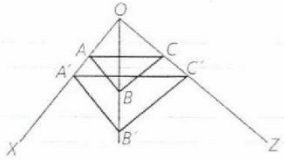


۳- در شکل مقابل  $MN \parallel BC$ : مقادیر x و y را به دست آورید.

$$\frac{9}{x} = \frac{x}{4} \rightarrow x = 6$$

$$\frac{9}{10} = \frac{y-1}{8}$$
$$72 = 10y - 10$$
$$82 = 10y$$
$$y = 8.2$$

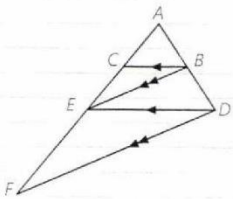




۴- در شکل مقابل می‌دانیم  $AB \parallel A'B'$  و  $BC \parallel B'C'$  با استفاده از قضیه تالس و

عکس آن ثابت کنید:  $AC \parallel A'C'$

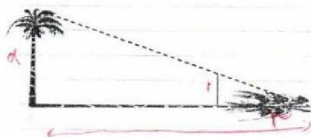
$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} \rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OC'}{OC} \rightarrow AC \parallel A'C'$$



۵- در شکل مقابل می‌دانیم  $BC \parallel DE$  و  $BE \parallel DF$ ، به کمک قضیه تالس در مثلث‌های ADE و ADF و مقایسه تناسب‌ها با یکدیگر، ثابت کنید:  $AE^2 = AC \cdot AF$  (به عبارت دیگر AE واسطه هندسی بین AC و AF است)

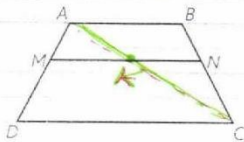
$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \rightarrow AE^2 = AC \cdot AF$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AF}$$



$$\frac{3}{4} = \frac{1}{x} \rightarrow x = \frac{4}{3} \approx 1.33$$

۶- یکی از کاربردهای قضیه تالس از زمان‌های دور تاکنون، محاسبه فاصله‌های غیرقابل دسترس بوده است؛ به عنوان مثال برای تعیین یک ارتفاع بلند مانند ارتفاع یک درخت بلند در زمانی معین، طول سایه درخت را روی زمین اندازه می‌گیریم؛ سپس یک قطعه چوب کوتاه را که به آن شاخص می‌گویند، طوری به صورت عمودی جابه‌جا می‌کنیم که سایه آن روی امتداد سایه درخت قرار گیرد و نوک سایه شاخص نیز بر نوک سایه درخت منطبق شود؛ به‌طور مثال اگر طول سایه درخت ۶ متر، طول سایه شاخص ۳ متر و طول شاخص ۱ متر باشد، بلندی درخت چند متر است؟



۷- در دوزنقه مقابل  $MN \parallel AB \parallel CD$ ، ثابت کنید:

(قضیه تالس در دوزنقه)  $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$

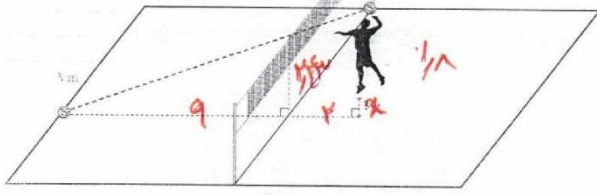
(راهنمایی: یکی از قطر‌ها را رسم کنید.)

$$\frac{AM}{MD} = \frac{AK}{KE} \rightarrow \frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$$

$$\frac{BN}{NC} = \frac{AK}{KE} \rightarrow \frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$$



۸- ابعاد یک زمین استاندارد والیبال ۹ متر در ۱۸ متر است که توسط خط میانی به دو مربع  $9 \times 9$  تفکیک می‌شود و تور والیبال مردان با ارتفاع  $2/43$  متر روی خط وسط نصب شده‌است. در یک لحظه، یک بازیکن با قد ۱۸ سانتی‌متر و در فاصله دو متری تور،



به هوا می‌برد و توی را که در ارتفاع ۳ سانتی‌متری بالای سرش است با ضربه آبنما بر تور وسط روانه زمین حریف می‌کند و توپ روی خط انتهایی زمین حریف می‌نشیند. این بازیکن برای ضربه زدن چقدر به هوا پریده‌است؟

$$\frac{9}{11} = \frac{2/43}{1.8+x} \rightarrow 14.2 \cdot 9x = 24.173$$

$$9x = 1.0103 \rightarrow x = 1/11$$

در این سوالم

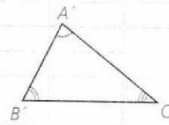
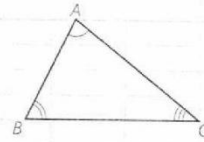
### تشریح مثلث‌ها

در سال گذشته با مفهوم تشابه و چندضلعی‌های متشابه آشنا شدید. در اینجا می‌خواهیم درباره تشابه مثلث‌ها، بیشتر بدانیم. با توجه به تعریف تشابه چندضلعی‌ها، دو مثلث  $ABC$  و  $A'B'C'$  متشابه‌اند؛ اگر و فقط اگر زوایای آنها هم‌اندازه و اندازه‌های اضلاع آنها متناسب باشند:

$$\angle A = \angle A'$$

$$\angle B = \angle B', \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} \Leftrightarrow \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$$

$$\angle C = \angle C'$$



نسبت اندازه‌های اضلاع نظیر هم در دو مثلث را نسبت تشابه می‌گوییم. مثلاً اگر  $\frac{A'B'}{AB} = \frac{1}{3}$  باشد و اندازه اضلاع مثلث  $A'B'C'$  نظیر به نظیر نصف اضلاع مثلث  $ABC$  باشند، گوییم مثلث  $A'B'C'$  با مثلث  $ABC$  با نسبت تشابه  $\frac{1}{3}$ ، متشابه است.

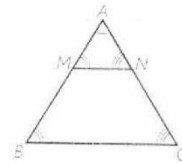
سوال: مثلث  $ABC$  با چه نسبت تشابه‌ی، با مثلث  $A'B'C'$  متشابه است؟

$\frac{2}{1}$

### قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها

اگر خط راستی موازی یکی از اضلاع مثلثی، دو ضلع دیگر (یا امتداد آنها) را در دو نقطه قطع کند، مثلثی با آنها تشکیل می‌دهد که با مثلث اصلی متشابه است.

$$MN \parallel BC \Rightarrow \Delta AMN \sim \Delta ABC$$



- زاویه‌های  $\angle M$  و  $\angle N$  به ترتیب با زاویه‌های  $\angle B$  و  $\angle C$  برابرند. چرا؟
- با توجه به تعمیم قضیه نالس تناسب زیر را کامل کنید:

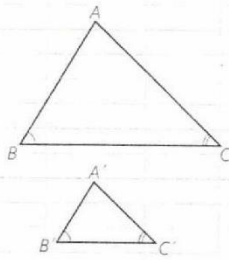
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

۳- از (۱) و (۲) در مورد مثلث‌های  $AMN$  و  $ABC$  چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

$$\Delta AMN \sim \Delta ABC$$



حال با توجه به قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها، می‌توانیم سه قضیه اصلی را که حالت‌های مختلف تشابه مثلث‌ها را بیان می‌کند (مانند حالت‌های هم‌نهشتی مثلث‌ها) اثبات کنیم. راهبرد کلی ما برای اثبات این سه قضیه، این است که روی اضلاع AB و AC از مثلث بزرگ‌تر، AM و AN را هم‌اندازه دو ضلع نظیر A'B' و A'C' جدا، و ثابت کنیم MN موازی BC است.



**قضیه ۱:** هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلث دیگر هم‌اندازه باشند، دو مثلث متشابه‌اند.  
( $\hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}' \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ )

اثبات: روی ضلع‌های AB و AC پاره‌خط‌های AM و AN را به ترتیب هم‌اندازه با A'B' و A'C' جدا می‌کنیم.

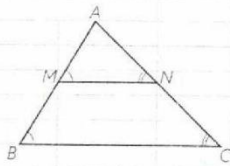
$$1- \angle B = \angle B' \text{ و } \angle A + \angle B + \angle C = \angle A' + \angle B' + \angle C' = 180^\circ$$

$$\text{و } \angle C = \angle C' \text{ بنابراین } \angle A = \angle A'$$

$$2- \Delta AMN \cong \Delta A'B'C' \Rightarrow \angle A = \angle A' \text{ و } AM = A'B' \text{ و } AN = A'C'$$
  
$$\Rightarrow \angle M = \angle B' \text{ و } \angle N = \angle C' \text{ و } MN = B'C'$$

$$3- \angle M = \angle B' \text{ و } \angle B = \angle B' \Rightarrow \angle M = \angle B \Rightarrow MN \parallel BC$$

۴- طبق قضیه اساسی تشابه،  $\Delta AMN \sim \Delta ABC$  و در نتیجه:  $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$



**قضیه ۲:** هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویه بین آنها، هم‌اندازه باشند، دو مثلث متشابه‌اند:

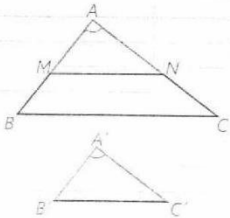
$$\angle A = \angle A', \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

اثبات: روی ضلع‌های AB و AC، پاره‌خط‌های AM و AN را به ترتیب هم‌اندازه با A'B' و A'C' جدا می‌کنیم.

۱- مثلث‌های AMN و A'B'C' به چه حالتی هم‌نهشت‌اند؟ اجزای برابر آنها را مشخص کنید.

۲- در فرض مسئله به جای A'B' و A'C'، پاره‌خط‌های هم‌اندازه با آنها را قرار دهید. حال بگویید چرا  $MN \parallel BC$ ؟

۳- با توجه به قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها و نتیجه قسمت (۱) درستی حکم را ثابت کنید. چون  $BC \parallel MN$  پس  $\Delta AMN \sim \Delta ABC$  و چون  $\Delta AMN \cong \Delta A'B'C'$  پس  $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$



فرض

$$\begin{cases} AM = A'B' \\ AN = A'C' \\ \hat{A} = \hat{A}' \end{cases}$$
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} \rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \rightarrow MN \parallel BC$$



## اهتمام ادبی (واحد آزمون‌های آنلاین)

<https://exam.ehtemadadabi.ir>

قضیه ۳: هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

اثبات: روی AB و AC، پاره‌خط‌های AM و AN را به ترتیب هم‌اندازه A'B' و A'C' جدا کنید.

۱- در فرض به جای A'B' و A'C' مساوی‌های آنها را جایگزین کنید و سپس بگویید چرا  $MN \parallel BC$ !

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

۲- از قضیه اساسی تشابه، چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟  $\Delta AMN \sim \Delta ABC$

۳- تعمیم قضیه تالس را در مثلث ABC بنویسید. از مقایسه این تناسب‌ها با

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{MN}{BC} \quad \text{تناسب‌های فرض، نتیجه بگیرید:}$$

$$MN = B'C'$$

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{MN}{BC} \rightarrow \boxed{MN = B'C'}$$

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

۴- مثلث‌های A'B'C' و AMN به چه حالتی هم‌نهشت‌اند؟ از اینجا درستی حکم را ثابت کنید.  $\Delta AMN \cong \Delta A'B'C' \rightarrow \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$

مثال: مطابق شکل روبه‌رو، یک تیر (دکل) انتقال برق به ارتفاع ۲۱ متر در اثر وزش باد خم شده است و در موقعیت جدید، نوک آن از زمین ۱۸ متر فاصله دارد. می‌خواهیم با قرار دادن یک تیر فلزی به طول ۱۵ متر، عمود بر آن، آن را به‌طور موقت سرپا نگه داریم. پای این تیر فلزی را باید در چه فاصله‌ای از پای تیر انتقال برق محکم کنیم؟  
حل: اگر تیر برق را با یک پاره‌خط و تیر فلزی نگه‌دارنده را نیز با پاره‌خطی دیگر مشخص کنیم، شکل روبه‌رو را دوباره رسم می‌کنیم.  
حال در دو مثلث ABC و BDE داریم:

$$\angle B = \angle B, \angle C = \angle E = 90^\circ \Rightarrow$$

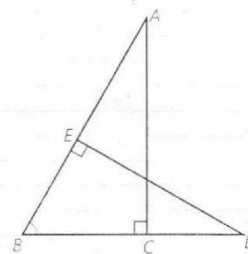
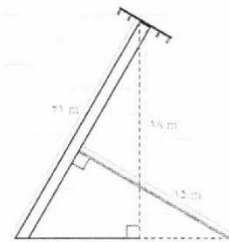
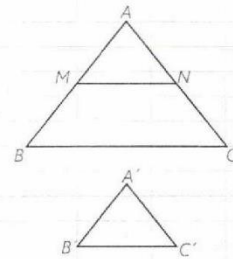
$$\Delta ABC \sim \Delta BDE \Rightarrow$$

(در نوشتن نسبت تشابه، توجه کنید که اضلاع روبه‌رو به زوایای مساوی در دو مثلث را در یک نسبت بر هم تقسیم کنید.)

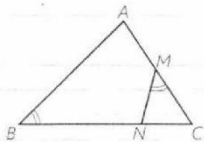
$$\frac{DE}{AC} = \frac{BD}{AB} = \frac{BE}{BC} \Rightarrow \frac{15}{18} = \frac{BD}{21} \Rightarrow BD = \frac{21 \times 15}{18} = 17.5 \text{ m}$$

یعنی باید پای تیر فلزی را در فاصله ۱۷/۵ متری از پای دکل برق محکم کرد.

با استفاده از این سه قضیه (به خصوص قضیه ۱) می‌توانیم تشابه مثلث‌های متشابه را اثبات کنیم و از آن طریق مسئله‌های زیادی را حل کنیم.







مثال: در مثلث ABC، از نقطه M وسط AC، زاویه NMC را مساوی زاویه B جدا کرده‌ایم. اگر  $NC=2$  و  $NB=4$ ، طول AC را به دست آورید.

حل: با کمی دقت مشاهده می‌کنید که مثلث‌های MNC و ABC دو زاویه هم‌اندازه دارند و در نتیجه متشابه‌اند.

$$\angle M = \angle B, \angle C = \angle C \Rightarrow \Delta MNC \sim \Delta ABC$$

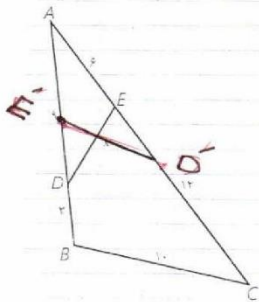
از آنجا با نوشتن نسبت تشابه داریم:

$$\frac{MC}{BC} = \frac{MN}{AB} = \frac{NC}{AC}$$

و به جای MC،  $\frac{AC}{2}$  را قرار می‌دهیم:

$$\frac{AC}{2BC} = \frac{NC}{AC} \Rightarrow AC^2 = 2NC \cdot BC = 2NC(NC + NB) \Rightarrow AC^2 =$$

$$2 \times 2(2 + 4) = 24 \Rightarrow AC = 2\sqrt{6}$$



مثال: در شکل مقابل اندازه هر پاره‌خط روی آن نوشته شده است. اندازه x را به دست آورید.

حل: به کمک عددهای داده شده، بدیهی است که:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} \quad \text{بنابراین} \quad \frac{AD}{AC} = \frac{9}{12} \quad \text{و} \quad \frac{AE}{AB} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

مثلث‌های ADE و ABC متشابه‌اند. نسبت تشابه را بنویسید و x را به دست آورید.

$$\frac{9}{12} = \frac{9}{12} = \frac{x}{10} \Rightarrow x = 7.5$$

سؤال: در شکل، روی AC، AD را هم اندازه AD و روی AB، AE را هم

اندازه AE جدا کنید. چرا  $DE \parallel BC$ ؟  $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow DE \parallel BC$

اثبات قضیه فیثاغورس و روابط طولی دیگر در مثلث قائم الزویه

**فعالیت ۱**

۱- در مثلث قائم الزویه ABC ( $A=90^\circ$ ) ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. آیا می‌توانید

دو زاویه هم‌اندازه را در دو مثلث ABH و ABC نام ببرید؟  $\hat{A} = \hat{H} = 90^\circ$  و  $\hat{B} = \hat{B}$

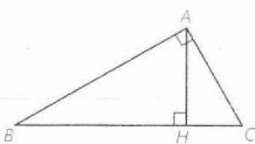
به همین ترتیب دو زاویه هم‌اندازه از دو مثلث ACH و ABC را نام ببرید. بنابراین

$$\hat{C} = \hat{C} \quad \text{و} \quad \hat{A} = \hat{H}$$

می‌توانیم بگوییم:

$$\Delta ABH \sim \Delta ABC, \quad \Delta ACH \sim \Delta ABC$$

چرا مثلث‌های ABH و ACH، خودشان با هم متشابه‌اند؟ دو مثلث متشابه خورد با هم متشابه‌اند





نتیجه

در هر مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، آن را به دو مثلث قائم‌الزاویه تفکیک می‌کند که هر دو با هم و با مثلث اصلی متشابه‌اند.

۲- نسبت تشابه دو مثلث ABH و ABC را بنویسید:

$$\frac{AH}{AC} = \frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB} \Rightarrow AB^2 = BH \times BC$$

۳- نسبت تشابه دو مثلث ACH و ABC را بنویسید و از آنجا ثابت کنید AC وسطه هندسی BC و CH است.

$$\frac{AC}{BC} = \frac{CH}{AC} = \frac{AH}{AB} \rightarrow AC^2 = BC \times CH$$

۴- نسبت تشابه دو مثلث ABH و ACH را بنویسید و از آنجا ثابت کنید AH وسطه هندسی بین BH و CH است.

$$\frac{BH}{AH} = \frac{AH}{CH} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AH^2 = BH \times CH$$

۵- از روابط ۲ و ۳ داریم:

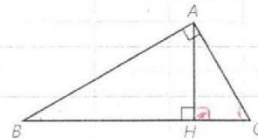
(قضیه فیثاغورس)

$$AB^2 + AC^2 = BC \times BH + BC \times CH = BC \times (BH + CH) = BC \times BC = BC^2$$

نتیجه

در مثلث قائم‌الزاویه ABC روابط مهم زیر برقرارند. این رابطه‌ها را روابط طولی می‌نامیم؛ زیرا با اندازه‌های اضلاع سروکار دارند:

- ۱)  $AB^2 = BC \cdot BH$
- ۲)  $AC^2 = BC \cdot CH$
- ۳)  $AB^2 + AC^2 = BC^2$
- ۴)  $AH^2 = BH \cdot CH$
- ۵)  $AH \times BC = AB \times AC$



تمرین

۱- در هر یک از شکل‌های زیر، تشابه مثلث‌ها را ثابت کنید و از آنجا مقادیر x, y را مشخص کنید:

برابری دوزاویه

$$\frac{2}{5} = \frac{3}{x} \Rightarrow x = 7,5$$

برابری یک زاویه  
تناسب اضلاع  
همان زاویه

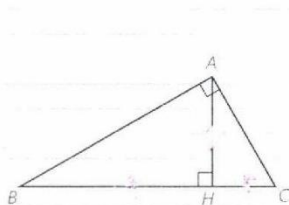
$$\frac{1}{3} = \frac{2}{4} = \frac{x}{6} \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$$

نسب ۳ ضلع



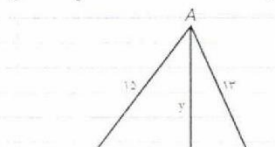
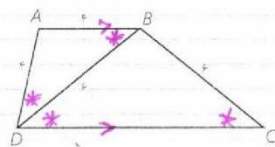
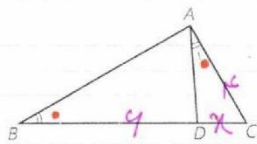
اهتمام ادبی (واحد آزمون‌های آنلاین)

<https://exam.ehtemameadabi.ir>



۲- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ( $A=90^\circ$ )، ارتفاع AH را رسم کرده‌ایم. به کمک روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه در هر یک از موارد زیر با توجه به مفروضات داده شده، مقادیر مجهول را محاسبه کنید.

- ۱)  $BH=9$  ,  $CH=4$  ,  $AH=?$  ,  $AB=?$  ,  $AC=?$
- ۲)  $AB=10$  ,  $BC=12$  ,  $AC=?$  ,  $AH=?$
- ۳)  $AB=8$  ,  $AC=6$  ,  $BH=?$  ,  $CH=?$
- ۴)  $AB=8$  ,  $AH=4$  ,  $BC=?$  ,  $AC=?$



۱)  $BH=9$  ,  $CH=4$  ,  $AH=?$  ,  $AB=?$  ,  $AC=?$   
 $AB^2 = 9^2 + 4^2 = 17^2 \Rightarrow AB = 17$   
 $AC^2 = 4^2 + 4^2 = 8^2 \Rightarrow AC = 8$

۲)  $AB=10$  ,  $BC=12$  ,  $AC=?$  ,  $AH=?$   
 $AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AH \cdot 12 = 10 \cdot AC$   
 $AH = \frac{5\sqrt{11}}{3}$

۳)  $AB=8$  ,  $AC=6$  ,  $BH=?$  ,  $CH=?$   
 $BC=10$

۴)  $AB=8$  ,  $AH=4$  ,  $BC=?$  ,  $AC=?$   
 $4^2 = BH \cdot CH$   
 $4^2 = (BC - 4) \cdot 4 \Rightarrow BC = 8$

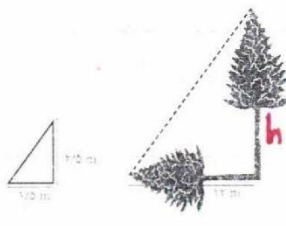
۳- در شکل روبه‌رو  $\angle A_1 = \angle B$  و  $AC=4$  و  $BD=6$ ، طول BC را به دست آورید.  
 $\triangle ADC \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{DC}{AC} = \frac{AC}{BC} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AC^2 = DC \cdot BC$   
 $16 = 4x + x^2 \Rightarrow x^2 + 4x - 16 = 0 \Rightarrow x = 2$   
 $BC = 10$

۴- در شکل روبه‌رو ABCD دوزنقه است. طول قاعده CD را به دست آورید.  
 $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{BD} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{4}{x} \Rightarrow x = 5$

$21x = 180 \Rightarrow x = 8$

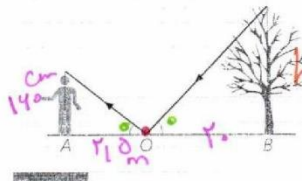
۵- در شکل مقابل، مثلثی با اضلاع ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ رسم شده است. به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث‌های ABH و ACH، مقادیر x و y را به دست آورید و از آنجا مساحت مثلث را محاسبه کنید.

$25 = (14-x)^2 + y^2$   
 $149 = 9x^2 + y^2 \Rightarrow 225 - (14-x)^2 = 149 - x^2$



۶- در حیاط یک دبیرستان، دو درخت بلند وجود دارد. معلم هندسه از دانش‌آموزان خواست که برای تعیین ارتفاع این دو درخت روشی را ارائه کنند. در اینجا روش‌های دو دانش‌آموز را می‌بینید. با توجه به اطلاعات داده شده ارتفاع هر درخت را تعیین کنید.

الف) روش ترانه: ترانه یک چوب  $2/5$  متری را به صورت عمودی روی زمین در جایی محکم کرد. طول سایه چوب در آن زمان  $1/5$  متر بود. هم‌زمان طول سایه درخت ۱۲ متر بود. از اینجا چگونه او توانست ارتفاع درخت را اندازه بگیرد؟ ارتفاع این درخت چند متر است؟  
 $\frac{h}{2/5} = \frac{12}{1/5} \Rightarrow h = 20$

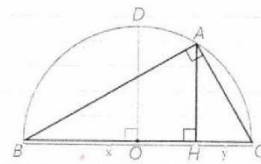


ب) روش شهرزاد: شهرزاد آینه‌ای کوچک را که در مقیاس بزرگ می‌توان یک نقطه در نظر گرفت، (نقطه O در شکل) روی زمین و در مسیر خط راستی که از پای درخت تا پای خودش کشیده است، قرار داد؛ سپس روی این خط آفتاب را جلو و عقب حرکت کرد تا بتواند، تصویر نوک درخت را در آینه ببیند. با توجه به آنچه از خواص

$\frac{h}{1.4} = \frac{20}{1.5} \Rightarrow h = 19.8$



آینه‌ها و انعکاس نور می‌دانید، بگویید چگونه می‌توان با داشتن طول‌های AO و BO روی زمین و اندازه قد شهرزاد (فاصله چشم او تا زمین)، ارتفاع درخت را به دست آورد. اگر قد شهرزاد ۱۶۰ سانتی‌متر و فاصله پای او از آینه ۲/۵ متر و فاصله آینه از پای درخت ۲۰ متر باشد، ارتفاع درخت چند متر است؟



۷- در شکل مقابل نیم‌دایره‌ای به قطر BC و به مرکز O رسم شده و نقطه دلخواه A روی محیط نیم‌دایره است. الف) چرا زاویه A قائمه است؟  
*نمایی که در آن زاویه قائمه برابر ۹۰ است*

ب) برای نقطه A که به دلخواه روی محیط دایره انتخاب شده و OD شعاع دایره است. اندازه‌های AH و OD را با هم مقایسه کنید.

$OD \cong AH$

ب) هر کدام از مقادیر AH و OD را بر حسب x و y محاسبه کنید و در قسمت (ب) جایگذاری کنید.

$AH = x \cdot y \rightarrow AH = \sqrt{xy}$

$OD = x \cdot y$

ت) آیا می‌توان برای هر دو عدد مثبت a و b گفت  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ؟ چرا؟

*به شرطی ثابت بالا*

۸- با قضیه فیثاغورس آشنا شدید. این قضیه می‌گوید اگر زاویه A از مثلثی مانند ABC، قائمه باشد، آنگاه  $a^2 = b^2 + c^2$ .

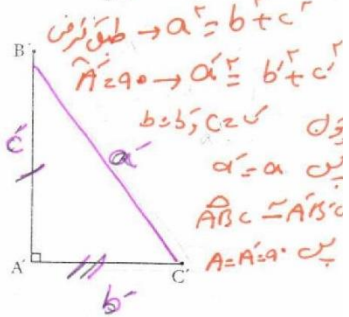
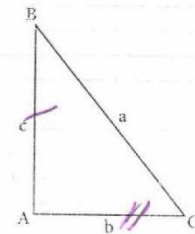
الف) عکس این قضیه را بنویسید. اگر درست است، آن را  $a^2 = b^2 + c^2$  بنویسید. اگر درست نیست، آن را  $a^2 \neq b^2 + c^2$  بنویسید.

ب) با انجام دادن مراحل زیر نتیجه بگیرید که عکس قضیه فیثاغورس نیز درست است. (۱) فرض کنیم مثلث ABC داده شده است و رابطه  $a^2 = b^2 + c^2$  بین اندازه طول‌های اضلاع آن برقرار است.

(۲) پاره‌خط‌های  $A'B'$  و  $A'C'$  را مطابق شکل مقابل به گونه‌ای در نظر بگیرید که  $A'B' = AB$  و  $A'C' = AC$  و  $\hat{A}' = 90^\circ$ .

(۳) با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث  $A'B'C'$ ، اندازه پاره خط  $B'C'$  را به دست آورید و ثابت کنید  $B'C' = BC$ .

(۴) توضیح دهید چرا  $ABC \cong A'B'C'$ ، و نتیجه بگیرید  $\hat{A} = 90^\circ$ . (ج) قضیه فیثاغورس و عکس آن را به صورت یک قضیه دو شرطی بیان نمایید.



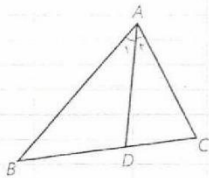
*اگر زاویه A از مثلث ABC برابر ۹۰ باشد آنگاه  $a^2 = b^2 + c^2$*

*و برعکس*

درس چهارم

### کاربردهایی از قضیه تالس و تشابه مثلث‌ها

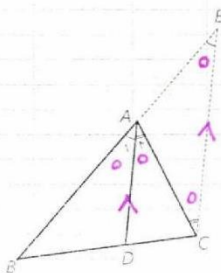
#### ۱- قضیه نیمسازهای زوایای داخلی



قضیه: در هر مثلث، نیمساز هر زاویه داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کند.

فرض:  $\angle A_1 = \angle A_2$

حکم:  $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$



اثبات: مطابق شکل، از نقطه C خط راستی موازی نیمساز AD رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در نقطه E قطع کند.

الف) چرا  $\angle A_1 = \angle E$  و چرا  $\angle A_2 = \angle C$ ؟  $\xrightarrow{AD \parallel EC}$

ب) با توجه به فرض، چه نتیجه‌ای درباره زوایای E و C می‌توان گرفت؟  $\hat{E} = \hat{C}$

مثلث AEC چه نوع مثلثی است؟ *مستوی الس*

ج) با توجه به قضیه تالس در مثلث EBC ( $AD \parallel EC$ ) نسبت  $\frac{BD}{CD}$  با کدام نسبت برابر است؟ با توجه به نتیجه قسمت (ب) اثبات را کامل کنید:

$$AD \parallel EC \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE} = \frac{AB}{AC}$$

یکی از نتایج فوری این قضیه این است که در هر مثلث، به سادگی می‌توان طول‌های قطعاتی را که هر نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند، با داشتن طول‌های اضلاع مثلث، محاسبه کرد.

مثال: در مثلث ABC،  $AB=7$ ،  $AC=5$ ،  $BC=8$  و طول‌های دو قطعه‌ای را که نیمساز زاویه B روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند، به دست آورید.

حل:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD} = \frac{7}{8} \Rightarrow \frac{AD+CD}{CD} = \frac{7+8}{8} \Rightarrow \frac{AC}{CD} = \frac{15}{8} \Rightarrow$$

$$CD = \frac{8 \times 5}{15} = \frac{8}{3}, \quad AD = AC - CD = 5 - \frac{8}{3} = \frac{7}{3}$$

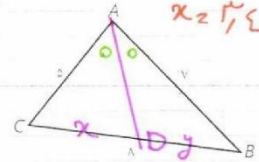


$$\frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AB}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{7} \rightarrow \frac{x+y}{y} = \frac{12}{7} \rightarrow \frac{1}{y} = \frac{12}{7} \rightarrow y = \frac{7}{12} \rightarrow x = \frac{35}{12}$$

کاردرکلاس

در شکل روبه‌رو نیمساز زاویه C را رسم کنید و طول‌های دو قطعه‌ای را که این نیمساز روی AB جدا می‌کند به دست آورید.



### ۲- نسبت اجزای فرعی، محیط‌ها و مساحت‌های دو مثلث متشابه

**قضیه:** هرگاه دو مثلث، متشابه باشند، آنگاه نسبت اندازه‌های هر دو جزء متناظر (ارتفاع‌ها، میانه‌ها، نیمسازها و محیط‌ها) مساوی نسبت تشابه و نسبت مساحت‌های آنها توان دوم (مربع) نسبت تشابه است.

به عنوان مثال اگر مثلث‌های  $A'B'C'$  و  $ABC$  متشابه باشند و نسبت تشابه آنها  $k$  باشد  $\left(\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k\right)$  آنگاه:

الف) نسبت اندازه‌های ارتفاع‌های متناظر آنها  $k$  است:

$$\frac{A'H'}{AH} = k$$

ب) نسبت اندازه‌های میانه‌های متناظر آنها  $k$  است:

$$\frac{C'N'}{CN} = k$$

ج) نسبت اندازه‌های نیمسازهای متناظر آنها مساوی  $k$  است:

$$\frac{B'D'}{BD} = k$$

در مورد محیط‌های دو مثلث نیز داریم:

$$\frac{P_{A'B'C'}}{P_{ABC}} = \frac{A'B' + A'C' + B'C'}{AB + AC + BC} = k$$

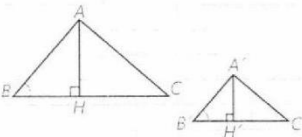
و در مورد مساحت‌ها داریم:

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = k^2$$

نکات: اگر درستی حکم را برای یکی از ارتفاع‌ها (میانه‌ها، نیمسازها) ثابت کنیم، درستی آن قابل تعمیم به سایر ارتفاع‌ها (میانه‌ها، نیمسازها) است. (چرا؟)

#### الف) ارتفاع‌ها

فرض	$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ , $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k$
حکم	$\frac{A'H'}{AH} = k$





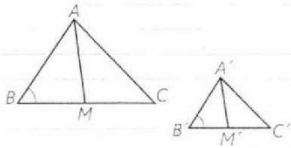
$$\hat{B} = \hat{B}' \text{ و } \hat{H} = \hat{H}'$$

زیرا  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

چرا  $\angle B = \angle B'$  بنابراین:  $\triangle ABH \sim \triangle A'B'H'$  (چرا؟) از آنجا درستی حکم را نتیجه‌گیری کنید.

$$\frac{A'B'}{AB} = k \rightarrow \frac{A'H'}{AH} = k$$

(ب) میانه‌ها



فرض  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ,  $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k$

حکم  $\frac{A'M'}{AM} = k$

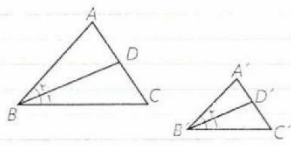
زیرا  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$  چرا  $\angle B = \angle B'$ ؟

$$\frac{B'M'}{BM} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}BC} = \dots = k \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'M'}{BM}$$

برای یکنوازی و تناسب افدع همان زاویه بنابراین  $\triangle A'B'M' \sim \triangle ABM$  (چرا؟) از آنجا درستی حکم را نتیجه بگیرید.

$$\frac{A'B'}{AB} = k \rightarrow \frac{A'M'}{AM} = k$$

(ج) نیمسازها



فرض  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ,  $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k$

حکم  $\frac{B'D'}{BD} = k$

زیرا  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$  چرا  $\angle B = \angle B'$ ،  $\angle A = \angle A'$ ؟

بنابراین  $\triangle A'B'D' \sim \triangle ABD$  (چرا؟) از آنجا درستی حکم را نشان دهید.

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'D'}{BD} = k$$

(د) محیط‌ها

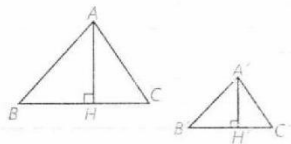
به سادگی و به کمک ویژگی تناسب‌ها می‌توان نوشت:

$$\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k \Rightarrow$$

$$\frac{A'B' + A'C' + B'C'}{AB + AC + BC} = k \Rightarrow \frac{P_{A'B'C'}}{P_{ABC}} = k$$

(ه) مساحت‌ها

دیدیم که نسبت ارتفاع‌های نظیر، مساوی نسبت تشابه است؛ بنابراین داریم:



$$\frac{A'H'}{AH} = \frac{B'C'}{BC} = k \quad \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}A'H'.B'C'}{\frac{1}{2}AH.BC} = \frac{A'H'}{AH} \times \frac{B'C'}{BC} = k.k = k^2$$



کار در کلاس

چهارضلعی‌های متشابه  $A'B'C'D'$  و  $ABCD$  مفروض‌اند.

۱- اگر نسبت تشابه دو چهارضلعی،  $k$  باشد، ثابت کنید نسبت محیط‌های آنها

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'} = k \rightarrow \frac{AB+BC+CD+DA}{A'B'+B'C'+C'D'+D'A'} = k$$

۲- قطرهای  $AC$  و  $A'C'$  را رسم کنید. نشان دهید:

$$\Delta ACD \sim \Delta A'C'D', \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$
  
$$\frac{AD}{A'D'} = \frac{DC}{D'C'} \text{ و } \hat{D} = \hat{D}' \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \text{ و } \hat{B} = \hat{B}'$$

۳- جاهای خالی را پر کنید:

$$\frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta A'C'D'}} = k^2, \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'B'C'}} = k^2 \Rightarrow \frac{S_{\Delta ACD} + S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'C'D'} + S_{\Delta A'B'C'}} = k^2 \Rightarrow \frac{S_{ABCD}}{S_{A'B'C'D'}} = k^2$$

بنابراین نسبت مساحت‌های دو چهارضلعی، مساوی مربع نسبت تشابه آنهاست. به همین ترتیب می‌توانیم نسبت محیط‌ها و مساحت‌های هر دو  $n$  ضلعی متشابه را به صورت زیر ثابت کنیم:

هرگاه دو چند ضلعی با نسبت تشابه  $k$  متشابه باشند، نسبت محیط‌های آنها، مساوی  $k$  و نسبت مساحت‌های آنها  $k^2$  است.

مثال: محیط یک مثلث متساوی‌الاضلاع سه برابر محیط مثلث متساوی‌الاضلاع دیگر است. مساحت مثلث بزرگ‌تر، چند برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است؟  
حل: می‌دانیم مثلث‌های متساوی‌الاضلاع همواره با هم متشابه‌اند (چرا؟) بنابراین نسبت محیط‌های آنها، نسبت تشابه آنهاست، یعنی  $k=3$  بنابراین:  $\frac{S}{S'} = k^2 = 9$  یعنی مساحت مثلث بزرگ‌تر، ۹ برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است.

هر دو  $n$  ضلعی منتظم، همواره با هم متشابه‌اند.

کار در کلاس

۱- اندازه محیط‌های دو مثلث متشابه به ترتیب  $10$  و  $18$  واحد است. اگر مساحت مثلث بزرگ‌تر  $15$  واحد سطح باشد، مساحت مثلث کوچک‌تر، چند واحد سطح است؟

$$\frac{S}{S'} = k^2 \rightarrow \frac{S}{15} = \frac{10}{18} \rightarrow \frac{S}{15} = \frac{5}{9} \rightarrow S = \frac{50}{3}$$
  
$$\frac{P}{P'} = k \rightarrow \frac{18}{10} = k \rightarrow k = \frac{9}{5}$$





$$\frac{E}{A} = \frac{12}{x} \rightarrow x = 12 \cdot \frac{A}{E}$$

$$\frac{E}{A} = \frac{x}{12} \rightarrow x = 12 \cdot \frac{E}{A}$$

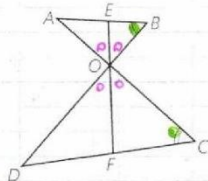
۲- نسبت مساحت‌های دو پنج ضلعی مشابه،  $\frac{4}{9}$  است. اگر محیط یکی از آنها ۱۲ واحد باشد، محیط پنج ضلعی دیگر چند واحد است؟ (چند جواب داریم؟)

۳- اندازه‌های اضلاع یک هفت ضلعی را سه برابر می‌کنیم؛ بدون اینکه اندازه‌های زاویه‌ها را تغییر دهیم. مساحت هفت ضلعی چند برابر می‌شود؟

۴۹ برابر

**فعالیت**

در شکل روبه‌رو  $EF = 1 \text{ cm}$  و  $\angle B = \angle C$  است و



الف) چرا مثلث‌های OAB و OCD مشابه‌اند؟  
ب) اگر  $\frac{OB}{OC} = \frac{2}{3}$ ، نسبت  $\frac{OE}{OF}$  چقدر است؟  
ج) طول‌های OE و OF را به دست آورید.

ب) اگر  $\frac{OB}{OC} = \frac{2}{3}$ ، نسبت  $\frac{OE}{OF} = \frac{2}{3}$  چقدر است؟  
ج) طول‌های OE و OF را به دست آورید.  
 $\frac{OE}{OF} = \frac{2}{3} \rightarrow \frac{OE+OF}{OF} = \frac{5}{3} \rightarrow \frac{1}{OF} = \frac{5}{3} \rightarrow OF = \frac{3}{5} \rightarrow OE = \frac{2}{5}$



تهران

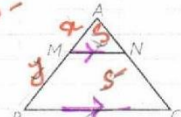
$$\frac{18}{10} = \frac{P}{P'}$$

$$\frac{10}{10} = \frac{P'}{P'}$$

۱- طول‌های اضلاع یک مثلث  $10^\circ$  و  $12^\circ$  و  $15^\circ$  سانتی متر است و طول بلندترین مثلثی مشابه آن،  $10^\circ$  سانتی متر است. محیط مثلث دوم را به دست آورید.

$$\frac{18}{10} = \frac{P}{P'} \rightarrow P = \frac{18 \cdot P'}{10}$$

$$\frac{10}{10} = \frac{P'}{P'} \rightarrow P' = \frac{10 \cdot P}{10} = P$$

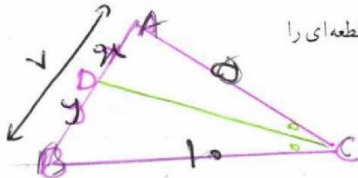


۲- در شکل روبه‌رو  $BC \parallel MN$  است و مساحت ذوزنقه MNCB هشت برابر

$$S = 8S \rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{AMN}} = 9$$

مساحت مثلث AMN است. نسبت  $\frac{MB}{MA}$  را به دست آورید.  
 $\frac{AB}{AM} = 3 \rightarrow \frac{x+y}{x} = 3 \rightarrow \frac{x+y}{x} = \frac{3-1}{1} \rightarrow \frac{y}{x} = \frac{2}{1}$

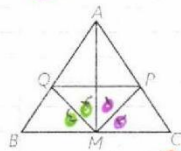
۳- در مثلث ABC،  $AB=7$ ،  $AC=5$  و  $BC=10$  است. طول‌های دو قطعه‌ای را که نیمساز زاویه C روی ضلع مقابل به آن ایجاد می‌کند، به دست آورید.



$$\frac{x}{y} = \frac{5}{10} \rightarrow \frac{x+y}{y} = \frac{10}{10} \rightarrow \frac{7+y}{y} = \frac{10}{10} \rightarrow \frac{7+y}{y} = 1 \rightarrow 7+y = y \rightarrow 7 = 0$$

$y = 4, x = 2$

۴- در مثلث ABC، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMC و



AMB هستند. ثابت کنید:

$PQ \parallel BC$

$$\triangle AMC \rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{AM}{MC}$$

$$\triangle AMB \rightarrow \frac{AQ}{QB} = \frac{AM}{MB}$$

$$PQ \parallel BC \text{ (رتیبی) } \frac{AP}{PC} = \frac{AQ}{QB}$$

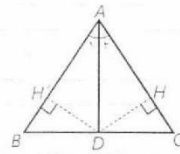


اگر در مسئله در نظر بگیریم که در این مسئله به این صورت است  
حفظ راست، در نظر بگیریم که در این مسئله به این صورت است

۵- در شکل روبه‌رو AD نیمساز زاویه A است و عمودهای DH و DH' نیز رسم شده‌اند.  
الف) با توجه به نتیجه (۲) از درس اول، نسبت مساحت‌های دو مثلث ABD و ACD را بنویسید.

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{BD}{DC}$$

زیرا هر دو نقطه در خطی هستند که از ارتفاع است



ب) چرا  $DH = DH'$  با توجه به این موضوع و نتیجه (۱) از درس اول بار دیگر

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{AB}{AC}$$

نسبت مساحت‌های دو مثلث را بنویسید:

نسبت D هر دو، در نظر بگیریم که در این مسئله به این صورت است  
نسبت D هر دو، در نظر بگیریم که در این مسئله به این صورت است

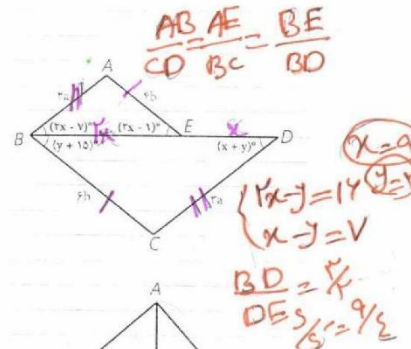
ج) از نتایج فوق چگونه می‌توانید درستی قضیه نیمسازها را نتیجه بگیرید؟

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

۶- در شکل روبه‌رو می‌دانیم  $BE = 2DE$  است. اولاً x و y را به دست آورید. ثانیاً

$$2x - 1 = y + 10 \quad 2x - y = x + 8$$

نسبت مساحت مثلث BCD به مساحت ABE را بیابید.



۷- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ( $\angle A = 90^\circ$ ) ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. می‌دانیم

که  $\Delta ABH \sim \Delta ABC \sim \Delta ACH$  است. با توجه به این موضوع،

الف) ثابت کنید:

$$\frac{S_{ABH}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2, \quad \frac{S_{ACH}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$

ب) با جمع کردن دو طرف تساوی‌های بالا و ادامه کار، درستی قضیه فیثاغورس را

$$\frac{S_{ABH} + S_{ACH}}{S_{ABC}} = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2} = 1 \rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$$

۸- مطابق شکل، روی یک ساختمان، یک آنتن به ارتفاع ۳/۲ متر نصب شده است.

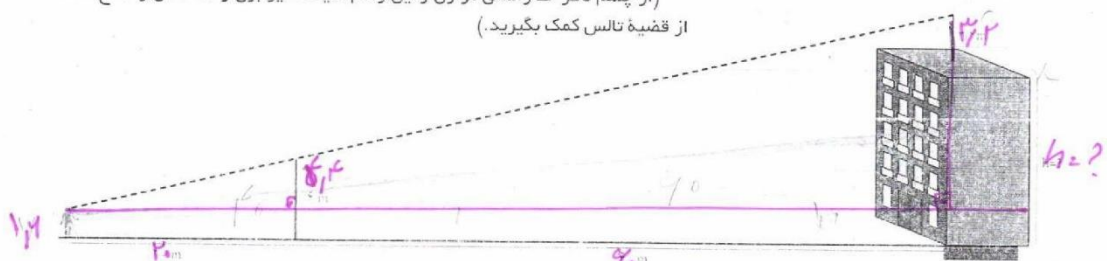
در فاصله ۶۰ متری ساختمان، یک تیر برق ۶ متری قائم وجود دارد و یک ناظر وقتی

در فاصله ۲۰ متری تیر می‌ایستد، انتهای آنتن و انتهای تیر برق را در یک راستا می‌بیند.

اگر بدانیم فاصله چشم ناظر از زمین ۱/۶ متر است، بلندی ساختمان را محاسبه کنید.

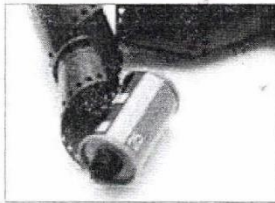
(از چشم ناظر خط راستی موازی زمین رسم کنید تا تیر برق و ساختمان را قطع کند.

از قضیه تالس کمک بگیرید.)

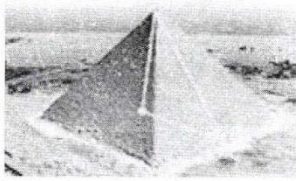
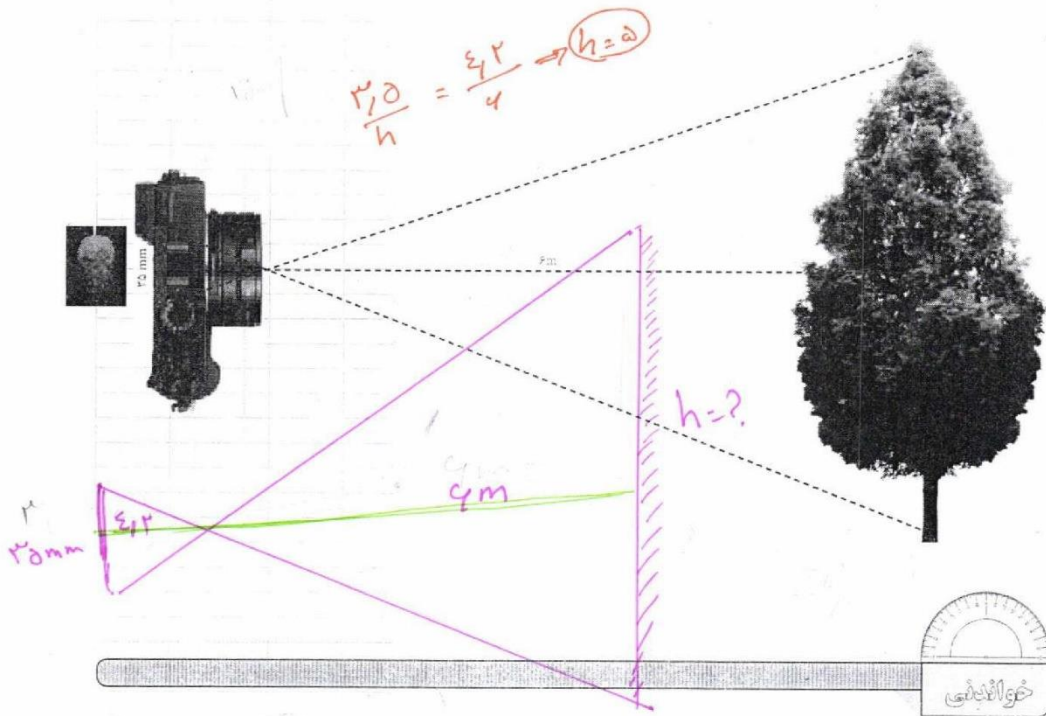


$$\frac{20}{10} = \frac{6}{x} \rightarrow x = 14,2$$

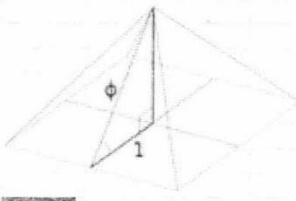
$$h = \frac{(14,2 - 2,2) \cdot 3,2}{14,2} + 1,2$$
$$h = 14m$$



۹- در دوربین‌های قدیمی، موقع عکس‌برداری، روی یک حلقه فیلم تعداد محدودی (مثلاً سی و شش عدد) تصویر منفی ثبت، و سپس این فیلم ظاهر می‌شود و عکس‌ها از روی آن چاپ می‌شوند. اگر فرض کنیم عرض یکی از این فیلم‌ها، ۳۵mm و فاصله آن درون دوربین تا عدسی<sup>۱</sup>، ۴/۲cm و فاصله عدسی تا درختی که از آن عکس می‌گیرد، ۶m باشد، اندازه واقعی درختی که از آن عکس گرفته می‌شود، چند متر است؟



اعداد فیثاغورسی به سه عددی می‌گویند که مجموع مربع‌های دو تا از آنها برابر با مربع سوم می‌باشد؛ به عبارتی اعداد  $a, b, c$  را فیثاغورسی گویند، هرگاه  $a^2 = b^2 + c^2$ . اعداد فیثاغورسی اندازه‌های ضلع‌های یک مثلث قائم‌الزاویه (راست گوشه) را تشکیل می‌دهند. بررسی‌ها نشان داده است که در برخی نقاط جهان در ساخت بناها پیش از شناخت قضیه فیثاغورس از ویژگی اعداد فیثاغورسی استفاده می‌شده است.



۱- واژه «تصویر منفی» با تصویب فرهنگستان به جای واژه «نگاتیو» به کار رفته است.

۲- واژه «عدسی» با تصویب فرهنگستان به جای واژه «لنز» به کار رفته است.



### اثبات ویژگی‌های تناسب

۱ طرفین - وسطین کردن: طرفین تساوی  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  را در عدد غیر صفر  $bd$  ضرب کنید:

$$\frac{a}{b} \times bd = \frac{c}{d} \times bd \Rightarrow ad = bc$$

۲ ویژگی‌های (۲) و (۳) با طرفین - وسطین کردن، به سادگی نتیجه می‌شوند:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc \Rightarrow da = cb \Rightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc \Rightarrow bc = ad \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

۳ ویژگی‌های ۵ و ۴ به صورت زیر با اضافه یا کم کردن عدد ۱ به دو طرف تناسب نتیجه می‌شوند:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1 \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \Rightarrow \frac{b}{a} + 1 = \frac{d}{c} + 1 \Rightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c} \Rightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$$

ویژگی‌های تفضیل نسبت در صورت و مخرج را خودتان اثبات کنید.

۴ اثبات ویژگی ۶:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow a = bk, c = dk \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{bk+dk}{b+d} = \frac{k(b+d)}{b+d} = k$$
$$\Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

به همین ترتیب می‌توان تعمیم این ویژگی را هم اثبات کرد.



اهتمام ادبی (واحد آزمون‌های آنلاین)

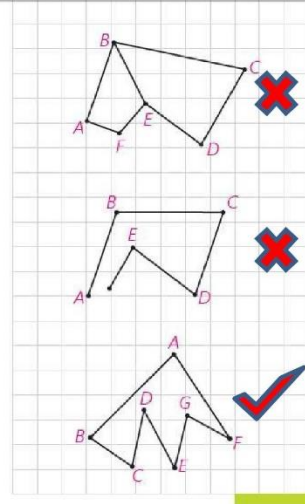
<https://exam.ehtemameadabi.ir>

فصل ۳ : چند ضلعی ها

درس اول : چهار ضلعی ها



**تعریف:** چندضلعی شکلی است شامل  $n$  ( $n \geq 3$ ) پاره‌خط متوالی که:  
 (۱) هر پاره‌خط، دقیقاً دو پاره‌خط دیگر را در نقاط انتهایی خودش قطع کند.  
 (۲) هر دو پاره‌خط که در یک انتها مشترک اند، روی یک خط نباشند.



هر یک از این پاره‌خط‌ها یک ضلع چند ضلعی است.  
 هر دو ضلع چندضلعی را که در یک انتها مشترک اند، دو ضلع مجاور و نقطه مشترک آن دو را رأس می‌نامند. هر دو زاویه چندضلعی را که هر دو در یک ضلع چندضلعی مشترک اند، دو زاویه مجاور به آن ضلع در چندضلعی می‌نامند. مانند  $\angle A$  و  $\angle B$  در شکل‌های (۱) و (۲)

هر گاه تعداد ضلع‌های چند ضلعی  $n$  تا باشد، آن را  $n$  ضلعی می‌نامند.  
 کدام یک از شکل‌های مقابل چند ضلعی است و تعداد ضلع‌ها و رأس‌های آن چند تا است؟ **۷ ضلع و ۷ رأس**  
 برخی ضلع‌های مجاور هم و غیر مجاور هم را مشخص کنید.

**مجاور:**  $AB, BC - BC, CD - CD, DE - \dots$     **غیر مجاور:**  $AB, CD - AB, DE - BC, EF - \dots$

یک چهار ضلعی چند قطر دارد؟ **دو قطر**

$n$  ضلعی  $A_1, A_2, \dots, A_n$  را در نظر می‌گیریم. از رأس  $A_1, \dots, A_n$  قطر می‌توان رسم کرد.  
 یا توجه به اینکه  $n$  رأس داریم، آیا می‌توان گفت تعداد قطر‌ها در  $n$  ضلعی  $n(n-3)$  است؟ **خیر**



با این فرمول، مستطیل چند قطر دارد؟  $4(4-3) = 4$

آیا جواب به دست آمده درست است؟ **خیر**

با چه تغییری در این فرمول به فرمول درست محاسبه قطر‌ها می‌رسیم؟ چرا این تغییر لازم است؟  
 زیرا هر رأس دو بار شمرده شده است.

در هر  $n$  ضلعی تعداد قطر‌ها  $\frac{n(n-3)}{2}$  است.



اهتمام ادبی (واحد آزمون‌های آنلاین)

<https://exam.ehtemameadabi.ir>

کاردرکلاس

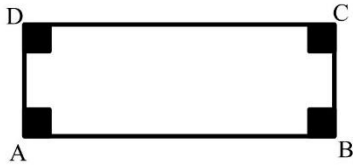
$n$  نقطه که هیچ سه‌تای آنها روی یک خط واقع نیستند، مفروض‌اند. با توجه به استدلالی که در محاسبه تعداد قطرهای  $n$  ضلعی به کار برده‌اید، نشان دهید از هر نقطه به نقاط دیگر  $1, 2, \dots, n-1$  پاره‌خط رسم می‌شود. بنابراین، این  $n$  نقطه را با  $\frac{n(n-1)}{2}$  پاره‌خط می‌توان به هم متصل کرد. چه رابطه‌ای بین این تعداد پاره‌خط و مجموع تعداد قطرهای و ضلع‌ها در  $n$  ضلعی وجود دارد؟

$$\frac{n(n-1)}{2} = n + \frac{n(n-2)}{2} \text{ با هم ببرند، به عبارت دیگر}$$

کار در کلاس صفحه ۵۶

کاردرکلاس

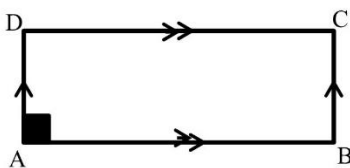
با توجه به تعریف‌های بالا درستی هریک از عبارات‌های زیر را توجیه کنید:  
الف) مستطیل یک متوازی‌الاضلاع است.  
ب) اگر در متوازی‌الاضلاع یک زاویه قائمه باشد، مستطیل است؛ چرا؟



الف: فرض:  $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$

حکم:  $AD \parallel BC$  ,  $AB \parallel CD$

برهان:  $\left. \begin{matrix} AD \perp AB \\ BC \perp AB \end{matrix} \right\} \Rightarrow AD \parallel BC$  ,  $\left. \begin{matrix} AB \perp AD \\ CD \perp AD \end{matrix} \right\} \Rightarrow AB \parallel CD$



ب: فرض:  $\angle A = 90^\circ$  ,  $AD \parallel BC$  ,  $AB \parallel CD$

حکم:  $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$

برهان:

۱  $AD \parallel BC$  ,  $AB$  مورب  $\Rightarrow \angle A = \angle B = 90^\circ$

۲  $AB \parallel CD$  ,  $AD$  مورب  $\Rightarrow \angle A = \angle D = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle A = \angle B = \angle D = 90^\circ \Rightarrow \angle C = 90^\circ$



اهتمام ادبی (واحد آزمون‌های آنلاین)

<https://exam.ehtemadadabi.ir>

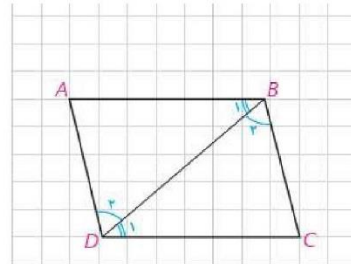
پ) لوزی یک متوازی‌الاضلاع است.  
 در لوزی ABCD قطر AC را رسم می‌کنیم. دو مثلث ABC و ADC به حالت **ض.ض.ض** هم‌نهشت‌اند. بنابراین دو زاویه  $\angle A_1$  و  $\angle C_1$  هم‌اندازه‌اند.  
 در نتیجه دو ضلع AB و CD موازی‌اند. به همین ترتیب دو ضلع مقابل BC و AD نیز موازی‌اند. یعنی لوزی متوازی‌الاضلاع است.  
 بنابراین، لوزی متوازی‌الاضلاعی است که دو ضلع مجاور آن هم‌اندازه باشند.  
 ت) مربع یک متوازی‌الاضلاع است.

پاسخ (ت): بنا به تعریف مربع، هر چهار ضلع مربع با هم برابرند پس هر مربع نوعی لوزی است. از طرف دیگر هر لوزی نیز نوعی متوازی‌الاضلاع است.

فعالیت ۱ صفحه ۵۶

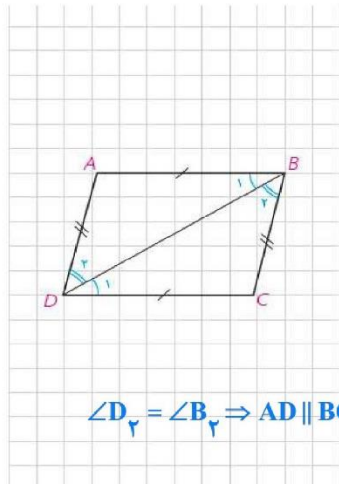
**فعالیت ۱**

متوازی‌الاضلاع ABCD را در نظر بگیرید و قطر BD را رسم کنید. از موازی بودن ضلع‌ها چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟  
 دو مثلث ABD و CDB به حالت ..... هم‌نهشت‌اند.  
 در نتیجه،  $AD = \dots\dots\dots$  و  $AB = \dots\dots\dots$ .



پاسخ:

$$\left. \begin{array}{l} \text{مورب } BD, AD \parallel BC \Rightarrow \angle B_1 = \angle D_2 \\ \text{مورب } BD, AB \parallel CD \Rightarrow \angle B_2 = \angle D_1 \\ BD = BD \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ز}} \Delta ABD \cong \Delta CDB \Rightarrow \begin{cases} AD = BC \\ AB = CD \end{cases}$$



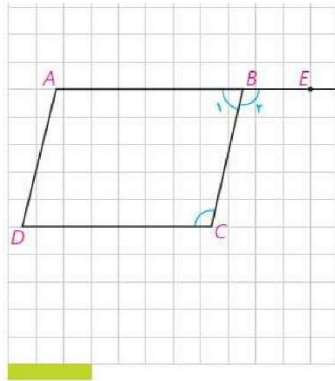
$\angle D_2 = \angle B_1 \Rightarrow AD \parallel BC$

**عکس قضیه ۱:** اگر در یک چهارضلعی، ضلع‌های مقابل دوجه‌دو هم‌اندازه باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

**ض ض ز**  
 در چهارضلعی ABCD قطر BD را رسم می‌کنیم. به حالت .....  
 $\Delta ABD \cong \Delta CDB$ . از هم‌نهشتی این دو مثلث نتیجه می‌گیریم، اندازه  $\angle B_1$  برابر اندازه  $\angle D_2$  ..... است.  
 بنابراین ضلع AB موازی ضلع  $CD$  ..... است. از چه قضیه‌ای آن را نتیجه گرفته‌اید؟ **قضیه ی خطوط موازی و مورب**

موازی بودن دو ضلع دیگر یعنی ضلع‌های AD و BC را چگونه نتیجه می‌گیرید؟  
 بنابراین چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.





مکمل اند

فعالیت

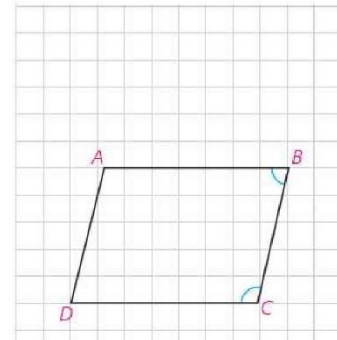
چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است. با توجه به شکل،  $\angle B_1 = \angle C$  است؛ چرا؟  $\angle B_1$  و  $\angle B_2$  نسبت به هم چه وضعی دارند؟ بنابراین  $\angle B_1$  و  $\angle C$  ... مکمل می‌باشند. بنابراین قضیه زیر ثابت شده است:

قضیه ۲: در متوازی‌الاضلاع هر دو زاویه مجاور مکمل اند.

صفحه ۵۸

عکس قضیه ۲: هر چهارضلعی که هر دو زاویه مجاور آن مکمل باشند، متوازی‌الاضلاع است.

در چهارضلعی ABCD، دو زاویه  $\angle B$  و  $\angle C$  با هم مکمل اند. در این صورت ضلع AB موازی ضلع CD است. به همین ترتیب دو زاویه  $\angle A$  و  $\angle B$  نیز مکمل اند. در نتیجه، ضلع AD موازی ضلع BC است؛ بنابراین چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است.



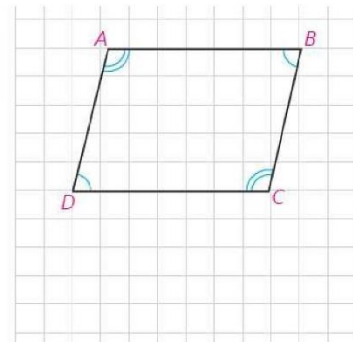
قضیه ۳: در هر متوازی‌الاضلاع، هر دو زاویه مقابل هم‌اندازه‌اند.

با توجه به قضیه قبل آن را ثابت کنید. می‌توانید از فعالیت (۱) نیز استفاده کنید.

$$\left. \begin{array}{l} \angle A + \angle B = 180^\circ \\ \angle B + \angle C = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \angle A + \angle B = \angle B + \angle C \Rightarrow \angle A = \angle C$$
$$\left. \begin{array}{l} \angle A + \angle B = 180^\circ \\ \angle A + \angle D = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \angle A + \angle B = \angle A + \angle D \Rightarrow \angle B = \angle D$$

عکس قضیه ۳: اگر در یک چهارضلعی هر دو زاویه مقابل هم‌اندازه باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

فرض کنیم در چهارضلعی ABCD هر دو زاویه مقابل هم‌اندازه باشند. یعنی  $\angle B$  و  $\angle D$  و همچنین  $\angle A$  و  $\angle C$  هم‌اندازه‌اند. می‌دانیم مجموع اندازه‌های زاویه‌های درونی هر چهارضلعی محدب  $360^\circ$  است. چگونه به کمک آن ثابت می‌کنید هر دو زاویه مجاور مثلاً  $\angle B$  و  $\angle C$  مکمل‌اند؟





اهتمام ادبی (واحد آزمون‌های آنلاین)

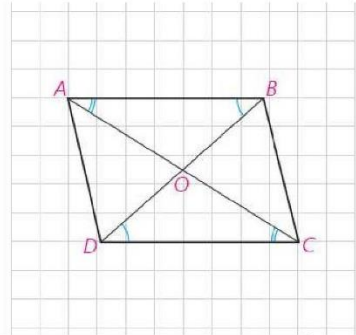
[https://exam.ehtemadabi.ir](https://exam.ehtemadadabi.ir)

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ \quad \left. \begin{array}{l} \angle A = \angle C \\ \angle B = \angle D \end{array} \right\} \rightarrow 2\angle A + 2\angle B = 360^\circ \xrightarrow{\div 2} \angle A + \angle B = 180^\circ \quad \boxed{1}$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle A = \angle C \\ \angle B + \angle D \end{array} \right\} \xrightarrow{\boxed{1}} \angle A + \angle B = \angle B + \angle C = \angle C + \angle D = \angle A + \angle D = 180^\circ \Rightarrow AB \parallel CD, AD \parallel BC$$

**فعالیت ۳**

در متوازی‌الاضلاع ABCD، دو قطر AC و BD را رسم می‌کنیم و نقطه تلاقی آن دو را O می‌نامیم.  $\triangle AOB \cong \triangle COD$ . چرا؟  
بنابراین،  $OB = OD$  و  $OA = OC$ . در نتیجه:

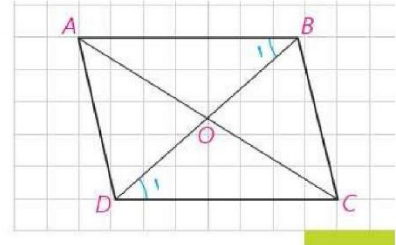


**قضیه ۴:** در هر متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند

$$\left. \begin{array}{l} \text{مورب } AC, AB \parallel CD \Rightarrow \angle A_1 = \angle C_1 \\ AB = CD \quad (\text{بنا به قضیه ۱}) \\ \text{مورب } BD, AB \parallel CD \Rightarrow \angle B_1 = \angle D_1 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ز}} \triangle OAB = \triangle OCD$$

**فعالیت ۴**

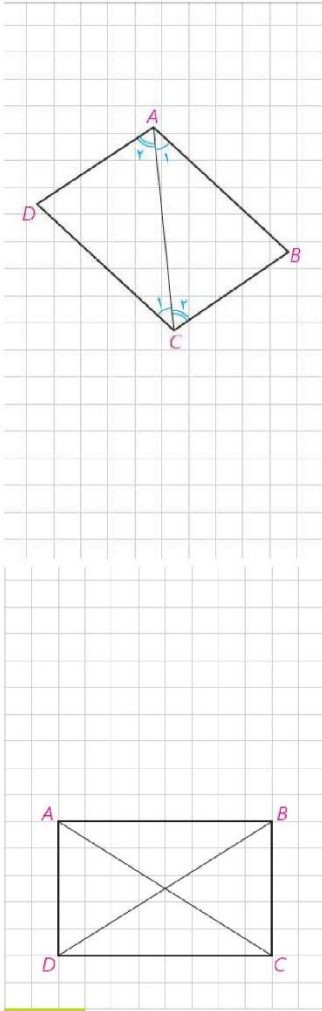
فرض کنید در یک چهارضلعی دو قطر منصف یکدیگر باشند. چگونه نشان می‌دهید این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است؟



$$\left. \begin{array}{l} OA = OC \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \quad (\text{متقابل به رأس}) \\ OB = OC \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle OAB \cong \triangle OCD \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \Rightarrow AB \parallel CD$$

به روش مشابه ثابت می‌شود:  $\triangle OAD \cong \triangle OBC \Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{D}_2 \Rightarrow AD \parallel BC$

**فعالیت ۵**



فرض کنید در یک چهارضلعی دو ضلع مقابل موازی و هم‌اندازه باشند. مثلاً در چهارضلعی ABCD، ضلع‌های AB و CD هم‌اندازه و موازی‌اند. قطر AC را رسم می‌کنیم.

اندازه  $\angle A_1$  با اندازه  $\angle C_1$  برابر است.

بنابراین، بنابر حالت هم‌نهستی... **قضیه ۱**،  $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ .

در نتیجه اندازه  $\angle A_2$  برابر اندازه زاویه  $\angle C_2$  است که از آن نتیجه می‌گیرید ضلع AD موازی ضلع BC... است. بنابراین، چهارضلعی متوازی الاضلاع است. یعنی!

هر چهارضلعی که دو ضلع مقابل آن هم‌اندازه و موازی باشند، متوازی الاضلاع است.

**ویژگی‌هایی از مستطیل و لوزی**

کدام ویژگی از مستطیل است که در هر متوازی‌الاضلاعی که مستطیل نباشد، برقرار نیست؟ در مورد مربع چطور؟ **خیر**

زاویه قائمه

در مستطیل ABCD، دو قطر را رسم می‌کنیم. از هم‌نهستی کدام دو مثلث می‌توان نتیجه گرفت  $AC=BD$ ؟ این هم‌نهستی را نشان دهید.

بنابراین در هر مستطیل قطرها **مساوی**‌اند.

$$\left. \begin{array}{l} AD = BC \\ \angle C = \angle D = 90^\circ \\ CD = CD \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{قضیه ۱}} \triangle ADC \cong \triangle BCD \Rightarrow AC = BD$$



اگر دو قطر یک چهارضلعی هم‌اندازه باشند، آیا می‌توان نتیجه گرفت آن چهارضلعی مستطیل است؟ خیر ( توضیح : در دوزنقه متساوی الساقین نیز قطرهای مساوی اند )

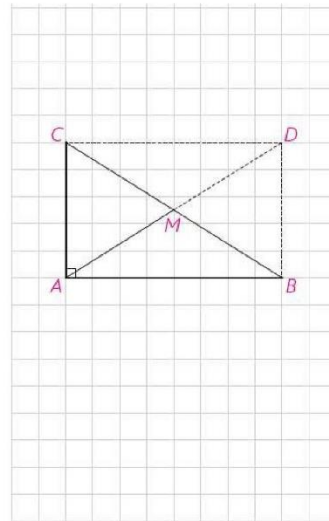
اگر این چهارضلعی متوازی الاضلاع باشد، چطور؟ آن را با دلیل بیان کنید.

$$\left. \begin{array}{l} AD = BC \\ AC = BD \\ CD = CD \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \Delta ADC \cong \Delta BCD \Rightarrow \angle C = \angle D$$

از طرف دیگر در هر متوازی الاضلاع زاویه‌های مجاور مکمل یکدیگرند . پس :  $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$

#### ۶ فعالیت

ویژگی مهمی در مثلث قائم الزاویه مثلث قائم الزاویه ABC را که در آن  $\angle A$  قائمه است و AM میانه وارد بر وتر است در نظر می‌گیریم.  
 روی نیم خط AM نقطه D را چنان در نظر می‌گیریم که  $AM = MD$ .  
 چرا چهارضلعی ABDC متوازی الاضلاع است؟ زیرا قطرهایش یکدیگر را نصف می‌کنند  
 چرا این چهارضلعی مستطیل است؟  
 زیرا زاویه A قائمه است و هر متوازی الاضلاعی که زاویه قائمه دارد . مستطیل است  
 در مورد قطرهای چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟  
 قطرهای هر مستطیل باهم مساوی اند.



اندازه AM چه رابطه‌ای با اندازه BC دارد؟ آن را بیان کنید.

$$AM = \frac{BC}{2}$$

در هر مثلث قائم الزاویه اندازه میانه وارد بر وتر ... نصف اندازه وتر است.



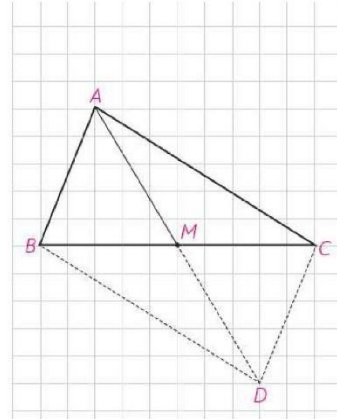
اهتمام ادبی (واحد آزمون‌های آنلاین)

[https://exam.ehtemadabi.ir](https://exam.ehtemadadabi.ir)

اگر در مثلثی اندازه میانه وارد بر یک ضلع، نصف اندازه آن ضلع باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه است.

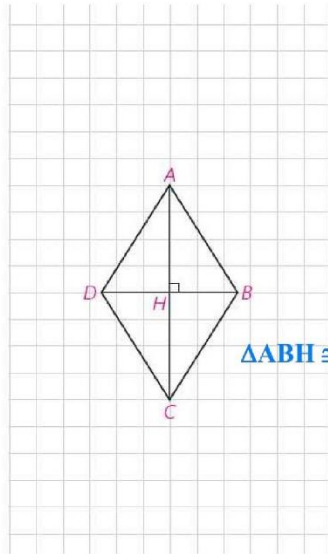
در مثلث  $ABC$ ،  $AM$  میانه وارد بر ضلع  $BC$  است و  $AM = \frac{BC}{2}$  روی نیم خط  $AM$  نقطه  $D$  را چنان در نظر می‌گیریم که  $MD = AM$ .

آیا می‌توانید نتیجه بگیرید  $AD = BC$  و قطرهای  $AD$  و  $BC$  منصف یکدیگرند؟ بله چگونه نتیجه می‌گیرید  $\angle A$  قائم است؟ بنا به قضایای قبل هر چهار ضلعی که قطرهایش یکدیگر را نصف کنند مستطیل است لذا تمام زاویه های داخلی آن قائم اند.



### ویژگی‌هایی که فقط در لوزی برقرارند

آیا می‌توانید یک ویژگی از لوزی را بیان کنید که در هر متوازی‌الاضلاع یا هر مستطیل، که لوزی نیست، برقرار نباشد؟ بله، هر چهار ضلع لوزی با هم برابرند.

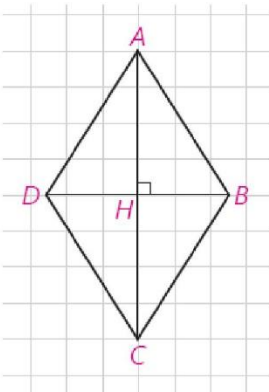


قطرهای لوزی  $ABCD$  را رسم می‌کنیم. چون لوزی متوازی‌الاضلاع است، قطرهای منصف یکدیگرند.  $\triangle ABD$  چه نوع مثلثی است؟ متساوی الساقین. نقطه تلاقی دو قطر را  $H$  می‌نامیم، در مثلث  $ABD$ ،  $AH$  چه پاره خطی است؟ میانه چرا پاره خط  $AH$  بر قطر  $BD$  عمود است و روی نیمساز  $\angle A$  است؟ زیرا  $\triangle ABH \cong \triangle ADH$  بنابراین!

در هر لوزی قطرهای عمود، منصف، یکدیگرند و قطرهای روی نیمسازهای... زاویه‌ها می‌باشند.

کار در کلاس صفحه ۶۱

۱- نشان دهید متوازی‌الاضلاعی که قطرهای آن بر هم عمود باشند، لوزی است.



فرض :  $AB \parallel CD, AD \parallel BC, AC \perp BD$

حکم :  $AB = BC = CD = DA$

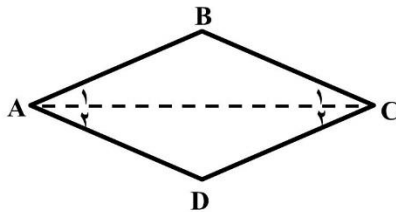


اهتمام ادبی (واحد آزمون‌های آنلاین)

<https://exam.ehtemameadabi.ir>

برهان: قطرهای هر متوازی الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند و از طرف دیگر  $AC \perp BD$  پس در  $\triangle ABD$ ،  $AH$  عمود منصف ضلع  $BD$  است. لذا مثلث متساوی الساقین می‌باشد. به طریق مشابه در  $\triangle ABC$  نیز  $BH$  عمود منصف ضلع  $AC$  می‌باشد بنا براین می‌توان نتیجه گرفت که  $AB = BC = CD = DA$  پس چهار ضلعی  $ABCD$  لوزی است.

۲- نشان دهید متوازی‌الاضلاعی که در آن لااقل یک قطر روی نیمساز یک زاویه آن باشد، لوزی است.



فرض:  $AB \parallel CD, AD \parallel BC, \angle A_1 = \angle A_2$

حکم:  $AB = BC = CD = DA$

برهان: در دو مثلث  $ABC, ACD$  داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \angle A_1 = \angle A_2 \\ \angle B = \angle D \end{array} \right\} \rightarrow \angle C_1 = \angle C_2 \quad [1]$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle A_1 = \angle A_2 \\ [1] \Rightarrow \angle C_1 = \angle C_2 \\ AC = AC \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ز}} \Delta ABC \cong \Delta ACD \Rightarrow \begin{cases} AB = AD \\ BC = CD \end{cases}$$

از طرف دیگر در هر متوازی الاضلاع، اضلاع موازی مساوی اند پس:  $AB = BC = CD = DA$

اکنون با توجه به ویژگی‌های مستطیل و لوزی نشان دهید در چه صورت مستطیل یا لوزی، مربع است.

۱- مستطیلی که دو ضلع مجاورش مساوی باشند مربع است. ۲- مستطیلی قطرهاش بر هم عمودند مربع است. ۳- مستطیلی قطرهاش نیمساز زاویه‌های داخلی باشند مربع است.

۱- هر لوزی که یکی از زاویه‌های آن قائمه باشد مربع است. ۲- هر لوزی که قطرهای مساوی دارد مربع است.



در شکل یک جک اتومبیل را می‌بینید. چهار بازوی آن یک لوزی تشکیل می‌دهند. آیا حالتی از جک وجود دارد که به شکل مربع درآید؟ اگر دو بازوی بالا با هم و دو بازوی پایین نیز با هم اندازه‌های مساوی داشته باشند، اما شکل جک لوزی نباشد، هنگام بسته‌شدن جک وقتی بخواهیم دو بازوی بالا روی دو بازوی پایین قرار گیرند چه مشکلی ایجاد می‌شود؟

**جک به طور کامل بسته نمی‌شود. زیرا مجموع طول‌های دو ضلع بالایی با مجموع طول‌های دو ضلع پایینی مساوی نیست.**

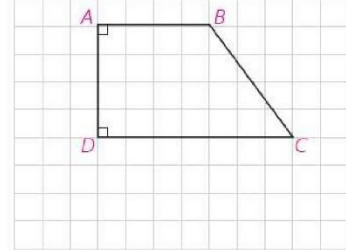
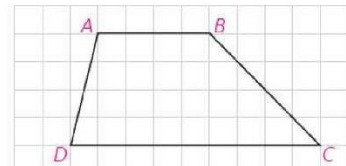
صفحه ۶۲

هر یک از دو ضلع  $AB$  و  $CD$  را که موازی‌اند، قاعده و هر یک از دو ضلع غیرموازی را ساق می‌نامند. از موازی بودن قاعده‌های  $AB$  و  $CD$  و قاطع‌های  $BC$  و  $AD$  در مورد زاویه‌ها چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ **دو زاویه مجاور به یک ساق، مکمل‌اند.**

زاویه‌های  $\angle A$  و  $\angle D$  **مکمل**..... هستند. همچنین زاویه‌های  $\angle B$  و  $\angle C$  **مکمل**..... هستند.

اگر در یک دوزنقه اندازه‌های دو ساق برابر باشند، آن را دوزنقه متساوی‌الساقین می‌نامند.

هرگاه در یک دوزنقه یک ساق بر یکی از قاعده‌ها عمود باشد، مسلماً بر قاعده دیگر نیز عمود است؛ چرا؟ **زیرا دو زاویه مجاور به یک ساق، مکمل‌اند.** در این صورت دوزنقه را قائم‌الزاویه می‌نامند.



#### ۷ فعالیت

دوزنقه متساوی‌الساقین  $ABCD$  را که در آن  $AD = BC$  است، در نظر می‌گیریم. از رأس  $B$  خطی موازی ساق  $AD$  رسم می‌کنیم تا قاعده  $DC$  را در  $E$  قطع کند. در این صورت چهارضلعی  $ABED$  **متوازی‌الاضلاع** است.

چرا دو زاویه  $\angle D$  و  $\angle E_1$  هم اندازه‌اند؟

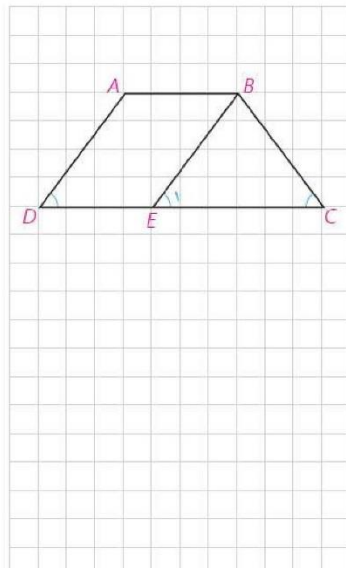
$$DC, AD \parallel BE \Rightarrow \angle D = \angle E_1 \text{ مورب}$$

چرا  $BC = BE$ ؟

زیرا اگر دو زاویه از مثلثی با هم برابر باشند، اضلاع روبرو به آنها نیز با هم برابرند

بنابراین اندازه  $\angle E_1$  برابر اندازه  $\angle C$ ..... است.

اکنون  $\angle D$  و  $\angle C$  هم اندازه‌اند. چرا؟ بنابراین:

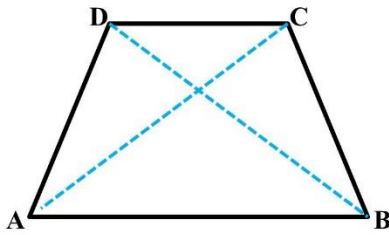


در هر دوزنقه متساوی‌الساقین زاویه‌های مجاور به یک قاعده هم‌اندازه‌اند.



به کمک ویژگی دوزنقه متساوی الساقین، ویژگی زیر به سادگی ثابت می‌شود. آن را  
صفحه ۶۳ ثابت کنید.

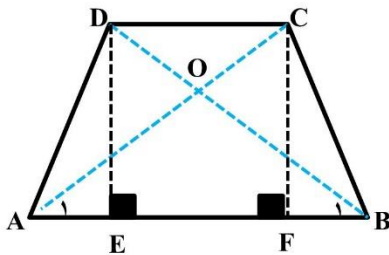
در هر دوزنقه متساوی الساقین، قطرها اندازه‌های مساوی دارند و بر عکس.



فرض:  $AD = BC$ ,  $AB \parallel CD$  حکم:  $AC = BD$

برهان: در دو مثلث  $ABD$ ,  $ABC$  داریم:

$$\left. \begin{array}{l} AD = BC \\ \angle A = \angle B \\ AB = AB \end{array} \right\} \text{ض ز ض} \rightarrow \Delta ABC \cong \Delta ABD \Rightarrow AC = BD$$



برعکس

فرض:  $AD = BC$ ,  $AB \parallel CD$ ,  $AC = BD$  حکم:  $AD = BC$

برهان: عمودهای  $DE, CF$  را بر  $AB$  وارد می‌کنیم چهار ضلعی  $CDEF$  مستطیل

است. پس  $DE = CF$

$$\left. \begin{array}{l} \angle E = \angle F = 90^\circ \\ AC = BD \\ CF = DE \end{array} \right\} \text{وتر و یک ضلع} \rightarrow \Delta ACF \cong \Delta BDE \Rightarrow \angle A_1 = \angle B_1 \Rightarrow OA = OB$$

$$\left. \begin{array}{l} OA = OB \\ AC = BD \end{array} \right\} \Rightarrow OC = OD$$

پس دو مثلث  $OAD, OBC$  بنا به حالت (ض ز ض) همبشت اند. در نتیجه  $AD = BC$

تمرین صفحه ۶۳



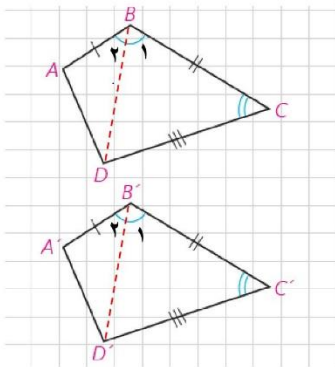
۱- در کدام  $n$  ضلعی تعداد قطرها و ضلع‌ها برابر است؟





پاسخ :

$$\frac{n(n-3)}{2} = n \Rightarrow n(n-3) = 2n \Rightarrow n-3=2 \Rightarrow n=5$$



الف ۲- در دو چهارضلعی مقابل  $AB = A'B'$  و  $\angle B = \angle B'$  و  $BC = B'C'$  و  $CD = C'D'$  و  $\angle C = \angle C'$  چگونه مساوی بودن اندازه‌های سایر ضلع‌ها و زاویه‌ها را نتیجه می‌گیرید؟

ب اگر  $\angle D = \angle D'$  و  $CD = C'D'$  و  $\angle C = \angle C'$  و  $BC = B'C'$  و  $\angle B = \angle B'$  در این حالت چگونه مساوی بودن اندازه‌های سایر ضلع‌ها و زاویه‌ها را نتیجه می‌گیرید؟

پاسخ قسمت الف :

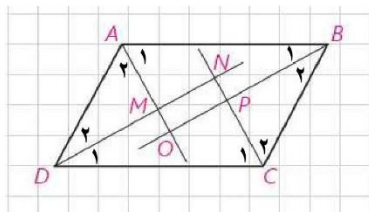
قطرهای  $BD$  ,  $B'D'$  را در دو چهارضلعی رسم می‌کنیم بدیهی است که دو مثلث  $BCD$  ,  $B'C'D'$  همیشه اند

$$\angle B_1 = \angle B'_1 \xrightarrow{\angle B = \angle B'} \angle B_2 = \angle B'_2 \quad \text{پس :}$$

در دو مثلث  $ABD$  ,  $A'B'D'$  :

$$\left. \begin{array}{l} AB = A'B' \\ \angle B_2 = \angle B'_2 \\ BD = B'D' \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABD \cong \Delta A'B'D' \xrightarrow{\Delta BCD \cong \Delta B'C'D'} \square ABCD \cong \square A'B'C'D'$$

پاسخ قسمت ب : در این حالت کافی است قطرهای  $AC$  ,  $A'C'$  را رسم نموده و مانند قسمت الف عمل کنیم.



۳- از تقاطع نیمسازهای داخلی یک متوازی‌الاضلاع، چهارضلعی  $MNPQ$  پدید آمده است. ثابت کنید این چهارضلعی مستطیل است. اگر  $ABCD$  مستطیل باشد، نشان دهید چهارضلعی  $MNPQ$  مربع است.

$$\square ABCD ; \angle A + \angle B = 180^\circ \Rightarrow \frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2} = \frac{180^\circ}{2} \Rightarrow \Delta OAB ; \angle A_1 + \angle B_1 = 90^\circ \Rightarrow \angle O = 90^\circ \quad \square 1$$

به روش مشابه ثابت می‌شود :

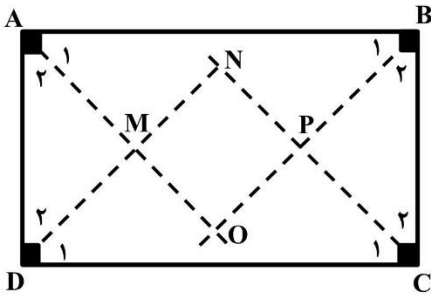


اهتمام ادبی (واحد آزمون‌های آنلاین)

[https://exam.ehtemadabi.ir](https://exam.ehtemadadabi.ir)

$$\Delta OAB; \angle C_1 + \angle D_1 = 90^\circ \Rightarrow \angle N = 90^\circ \quad [2] \quad , \quad \Delta PBC; \angle B_2 + \angle C_2 = 90^\circ \Rightarrow \angle P = 90^\circ \quad [2]$$

$[1], [2], [3] \Rightarrow \angle M = \angle N = \angle P = \angle O = 90^\circ \Rightarrow$  چهارضلعی MNPO مستطیل است



اگر چهارضلعی ABCD مستطیل باشد:

$$\Delta CDN; \angle C_1 = \angle D_1 = 45^\circ \Rightarrow CN = DN \quad [1]$$

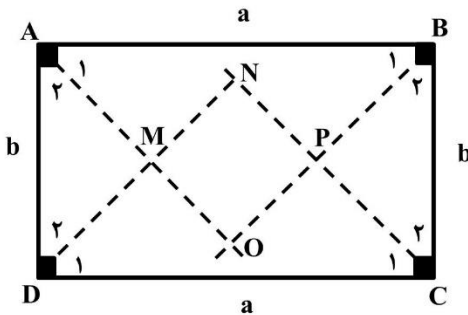
$$\left. \begin{array}{l} \angle A_2 = \angle B_2 = 45^\circ \\ AD = BC \\ \angle D_2 = \angle C_2 = 45^\circ \end{array} \right\} \longrightarrow \Delta BCP \cong \Delta ADM \Rightarrow PC = DM \quad [2]$$

$$[1], [2] \Rightarrow CN - PC = DN - DM \Rightarrow PN = MN$$

پس طول و عرض مستطیل MNPO با هم برابرند. به عبارت دیگر MNPO مربع است.

صفحه ۶۴

۴- در مسئله قبل، اگر اندازه‌های ضلع‌های مستطیل a و b باشند، اندازه ضلع مربع را بر حسب a و b محاسبه کنید.



$$\Delta DCN; \angle N = 90^\circ \Rightarrow CN^2 + DN^2 = CD^2$$

$$\frac{CN = DN}{\rightarrow 2CN^2 = a^2} \Rightarrow CN = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad [1]$$

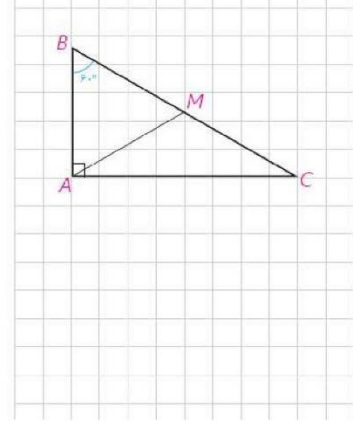
$$\Delta BCP; \angle P = 90^\circ \Rightarrow PC^2 + PB^2 = BC^2$$

$$\frac{CN = DN}{\rightarrow 2CP^2 = b^2} \Rightarrow CP = \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{b\sqrt{2}}{2} \quad [2]$$

$$[1], [2] \Rightarrow CN - CP = \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{b\sqrt{2}}{2} \Rightarrow PN = \frac{\sqrt{2}}{2}(a - b)$$



۵- مثلث قائم‌الزاویه  $\triangle ABC$  را که در آن  $\angle A$  قائمه و اندازه  $\angle C$  برابر  $30^\circ$  است، در نظر می‌گیریم. میانه وارد بر وتر را رسم کنید. مثلث‌های  $AMB$  و  $AMC$  چگونه مثلث‌هایی هستند؟ نشان دهید  $AB = \frac{BC}{2}$  یعنی در هر مثلث قائم‌الزاویه اگر اندازه یک زاویه  $30^\circ$  باشد، اندازه ضلع مقابل آن نصف اندازه وتر است.  
 سپس با استفاده از قضیه فیثاغورت نشان دهید،  $AC = \frac{\sqrt{3}}{2} BC$  یعنی در هر مثلث قائم‌الزاویه اگر یک زاویه  $60^\circ$  باشد، اندازه ضلع مقابل آن  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  اندازه وتر است.



پاسخ: در مثلث قائم‌الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است پس:

$$\triangle ABC; \angle A = 90^\circ, \angle C = 30^\circ \Rightarrow \angle B = 60^\circ$$

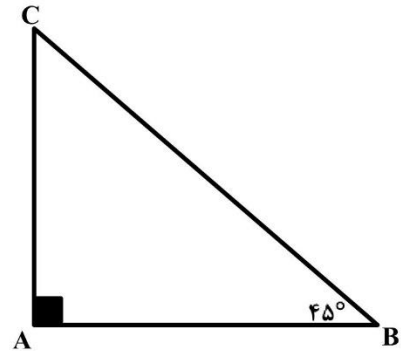
$$\triangle ABM; AM = BM \Rightarrow \angle A_1 = \angle B = 60^\circ \Rightarrow AM = BM = AB \Rightarrow AB = \frac{BC}{2}$$

$$\triangle ABC; \angle A = 90^\circ \Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2 \xrightarrow{AB = \frac{BC}{2}} AC^2 = BC^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2$$

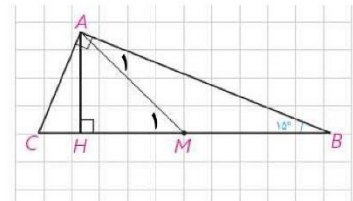
$$\Rightarrow AC^2 = \frac{3BC^2}{4} \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{3}}{2} BC$$

$$\triangle ABC; \angle A = 90^\circ, \angle B = 45^\circ \Rightarrow \angle B = \angle C \Rightarrow \begin{cases} AB = AC \\ AB^2 + AC^2 = BC^2 \end{cases}$$

$$2AB^2 = BC^2 \Rightarrow AB^2 = \frac{BC^2}{2} \Rightarrow AB = \frac{BC}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} BC$$



۶- در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$ ، اندازه زاویه  $B$  برابر  $15^\circ$  است. با رسم میانه و ارتفاع وارد بر وتر نشان دهید اندازه ارتفاع وارد بر وتر  $\frac{1}{4}$  اندازه وتر است.





اهتمام ادبی (واحد آزمون‌های آنلاین)

<https://exam.ehtemadadabi.ir>

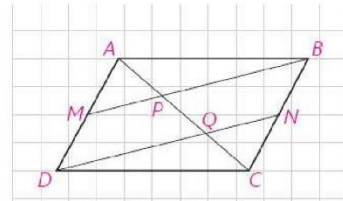
در مثلث قائم الزاویه میانه وارد وتر نصف وتر است پس:

$$\Delta ABC; AM = MB = \frac{BC}{2} \Rightarrow \angle A_1 = \angle B = 15^\circ \Rightarrow \angle M_1 = \angle A_1 + \angle B = 30^\circ$$

از طرف دیگر در مثلث قائم الزاویه ضلع روبرو به زاویه ی ۳۰ درجه نصف وتر است

$$\Delta AMH; \angle H = 90^\circ, \angle M_1 = 30^\circ \Rightarrow AH = \frac{AM}{2} \Rightarrow AH = \frac{\frac{AM}{2}}{2} = \frac{AM}{4}$$

۷- در متوازی‌الاضلاع ABCD، M و N به ترتیب وسط‌های ضلع‌های AD و BC می‌باشند. چرا خط‌های MB و DN موازی‌اند؟ به کمک آن ثابت کنید  $AP = PQ = QC$ .



پاسخ: اگر در یک چهار ضلعی دو ضلع موازی و مساوی باشند آن چهار ضلعی متوازی‌الاضلاع است. در چهار ضلعی BMDN داریم:

$$\left. \begin{array}{l} AD = BC \xrightarrow{\div 2} BN = MD \\ BN \parallel MD \end{array} \right\} \Rightarrow BM \parallel DN$$

$$\Delta ADQ; MP \parallel DQ \Rightarrow \frac{AP}{PQ} = \frac{AM}{MQ} = 1 \Rightarrow AP = PQ$$

$$\Delta BCP; BP \parallel QN \Rightarrow \frac{CQ}{QP} = \frac{CN}{NB} = 1 \Rightarrow CQ = PQ$$

$$\Rightarrow AP = PQ = QC$$



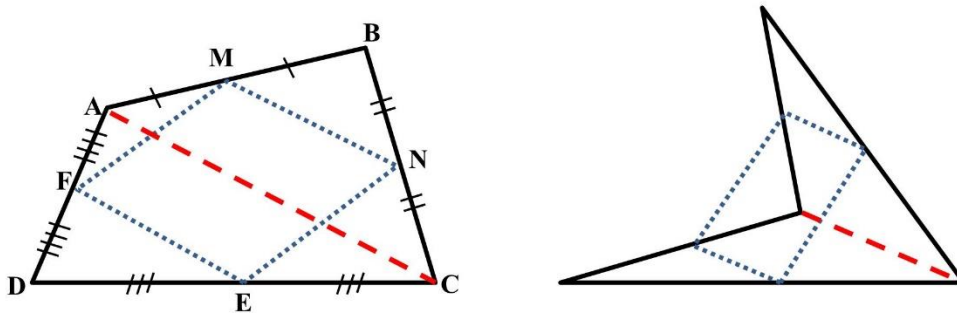
اهتمام ادبی (واحد آزمون‌های آنلاین)

<https://exam.ehtemadadabi.ir>

۸- ثابت کنید اگر وسط‌های ضلع‌های هر چهارضلعی را به طور متوالی به هم وصل کنیم، یک متوازی‌الاضلاع پدید می‌آید.

این چهارضلعی باید چه ویژگی‌ای داشته باشد تا این متوازی‌الاضلاع مستطیل یا لوزی شود؟

چه رابطه‌ای بین محیط متوازی‌الاضلاع پدید آمده با اندازه‌های قطرهای چهارضلعی اولیه وجود دارد؟



برهان: فرض کنیم نقاط  $F, E, N, M$  به ترتیب وسط‌های اضلاع  $AD, CD, BC, AB$  از چهارضلعی  $ABCD$  باشند باید ثابت کنیم چهارضلعی  $MNEF$  متوازی‌الاضلاع است. قطر  $AC$  را رسم می‌کنیم:

$$\Delta ABC; \frac{BM}{AB} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{عکس تالس ۱}} MN \parallel AC, MN = \frac{AC}{2} \quad [۱]$$

$$\Delta ACD; \frac{DE}{DC} = \frac{DF}{DA} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{عکس تالس ۱}} EF \parallel AC, EF = \frac{AC}{2} \quad [۲]$$

$$[۱], [۲] \Rightarrow MN \parallel EF, MN = EF$$

به عبارت دیگر در چهارضلعی  $MNEF$  دو ضلع موازی و مساوی اند لذا چهارضلعی  $MNEF$  متوازی‌الاضلاع است.

اگر قطرهای چهارضلعی  $ABCD$  بر هم عمود باشند. چهارضلعی  $MNEF$  مستطیل است. زیرا قطرهای چهارضلعی  $ABCD$  چهارضلعی  $MNEF$  موازی اند.

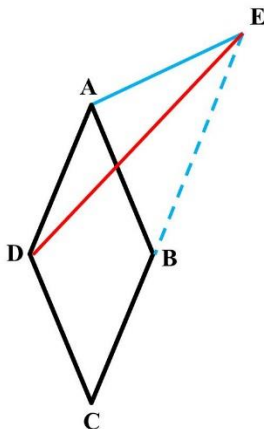
اگر قطرهای چهارضلعی  $ABCD$  با هم مساوی باشند. چهارضلعی  $MNEF$  لوزی است. و اندازه هر ضلع این لوزی نصف طول قطر چهارضلعی  $ABCD$  است.

$$MN = EF = \frac{AC}{2}, FM = EN = \frac{BD}{2} \Rightarrow MN + NE + EF + FM = 2 \left( \frac{AC}{2} + \frac{BD}{2} \right) = AC + BD$$



سوال های تکمیلی :

- ۱- یک  $n$  ضلعی ۹۰ قطر دارد . مجموع زاویه های داخلی آن را حساب کنید.
- ۲- اگر به تعداد اضلاع یک  $n$  ضلعی ۳ ضلع اضافه شود ۳۶ قطر به قطرهای آن اضافه می شود . مجموع زاویه های داخلی  $n$  ضلعی را حساب کنید.
- ۳- مجموع زاویه های خارجی  $n$  ضلعی محدب را حساب کنید.
- ۴- ثابت کنید یک چند ضلعی محدب نمی تواند بیش از سه زاویه حاده داشته باشد.
- ۵- در شش ضلعی محدب  $ABCDEF$  زاویه های روبرو دو به دو به هم متساوی اند  
( $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$ ) . ثابت کنید اضلاع روبرو دو به دو با هم موازی اند.
- ۶- نشان دهید در هر چهار ضلعی محدب ، زاویه ی حاده بین نیمسازهای دو زاویه مقابل ، مساوی نصف تفاضل دو زاویه ی دیگر است.
- ۷- ثابت کنید در هر متوازی الاضلاع هر خطی ( به جز قطر های متوازی الاضلاع ) که از مرکز می گذرد . آن را به دو ذوزنقه همنهشت تقسیم می کند.
- ۸- ثابت کنید در هر ذوزنقه متساوی الساقین زاویه های مقابل مکمل اند و برعکس.
- ۹- روی امتداد ضلع  $BC$  از لوزی  $ABCD$  نقطه  $E$  را چنان اختیار می کنیم که  $AE = CD$  نشان دهید  $DE$  نیمساز زاویه  $\angle AEB$  است.



- ۱۰- در مربع  $ABCD$  از رأس  $A$  خط دلخواهی رسم می کنیم تا ضلع  $CD$  را در نقطه  $E$  قطع کند. اگر  $F$  نقطه ی برخورد نیمساز زاویه ی  $\angle BAE$  با ضلع  $BC$  باشد . ثابت کنید :  $BF + DE = AE$
- ۱۱- نشان دهید برای آنکه چهار نیمساز زاویه های داخلی یک ذوزنقه از یک نقطه بگذرند کافی است که مجموع طول های قاعده ها ، مساوی مجموع طول ساق ها باشد.
- ۱۲- از متوازی الاضلاع طول دو قطر و یک ضلع معلوم است . این متوازی الاضلاع را رسم کنید



اهتمام ادبی (واحد آزمون‌های آنلاین)

<https://exam.ehtemameadabi.ir>

نقد و بررسی :

- ❖ در تعریف چند ضلعی صفحه ۵۴ از شرط هم صفحه بودن رئوس حرفی به میان نیامده است . چندضلعی که رئوس آن در یک صفحه نباشند چند ضلعی فضایی نام دارد این چند از نظر مجموع زاویه های داخلی ، محدب و مقعر بودن و .... با چندضلعی در صفحه متفاوت است .
- ❖ تعریف چند ضلعی محدب صفحه ۵۵ بدون ارائه هیچ گونه کاربردی در حل مسائل و قضیه های کتاب مطرح شده است.
- ❖ تعریف چهارضلعی ها بسیار منطقی و خوب ارائه شده و نتایج و قضیه های حاصل از این تعریف ها کاملا با هم سازگارند.
- ❖ اگر چه اغلب قضیه ها به صورت فعالیت یا کار در کلاس مطرح شده است . ولی مشارکت دانش آموز در روند استدلال بسیار اندک است . و اغلب سوالهای مطرح شده در متن قضیه ها به طور شهودی نیز قابل پاسخ هستند.
- ❖ در کل فصل نامگذاری چهارضلعی ها فقط با چهار حرف ثابت **D, C, B, A** است که این باعث می شود دانش آموز در مواجهه با مسائل خارج از چارچوب کتاب درسی دچار سردرگمی شود.
- ❖ مسائل کاربردی و مدل سازی در این فصل مطرح نشده است (به جز کار در کلاس صفحه ۶۱).
- ❖ در تمرین های صفحه ۶۴ متن سوال های ۵ و ۸ بسیار طولانی است و دانش آموز را دچار سردرگمی و اضطراب می کند.
- ❖ بهتر بود از مسائل ترسیم با خطکش و پرگار نیز در تمرینات استفاده می شد.

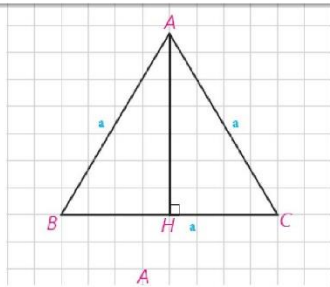


اهتمام ادبی (واحد آزمون‌های آنلاین)  
<https://exam.ehtemameadabi.ir>

## فصل ۳

### درس دوم : مساحت و کاربردهای آن





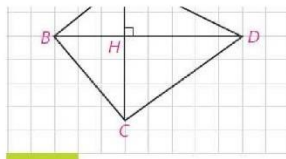
کاردرکلاس

فرض کنیم اندازه هر ضلع مثلث متساوی الاضلاع ABC برابر  $a$  باشد، ارتفاع  $AH$  را رسم می‌کنیم. ارتفاع  $AH$  میانه نیز است؛ چرا؟  
 $\Delta ABH \cong \Delta ACH \Rightarrow BH = CH = \frac{a}{2}$   
 به کمک قضیه فیثاغورث نشان دهید  $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$  و  $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$$\Delta ABH ; \angle H = 90^\circ \Rightarrow AH^2 + BH^2 = AB^2$$

$$\Rightarrow AH^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} a \times a = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$



در چهارضلعی ABCD دو قطر  $AC$  و  $BD$  برهم عموداند.

$$\left. \begin{array}{l} S_{ADB} = \dots\dots\dots \\ S_{DBC} = \dots\dots\dots \end{array} \right\} \begin{array}{l} S_{\Delta ADB} = \frac{1}{2} BD \times AH \\ S_{\Delta DBC} = \frac{1}{2} BD \times CH \end{array}$$

۶۵

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} BD \times (AH + HC) = \frac{1}{2} BD \times AC$$

با جمع این دو مساحت داریم،

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} BD(\dots + \dots) = \frac{1}{2} BD \dots$$

بنابراین!



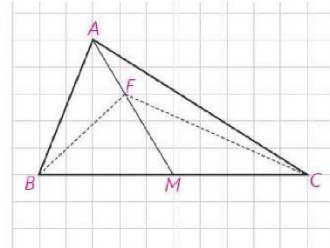
مساحت هر چهار ضلعی که قطرهای آن بر هم عمودند برابر است با نصف حاصلضرب اندازه های دو قطر آن چهار ضلعی



کاردرکلاس

نشان دهید یک میانه در هر مثلث، آن را به دو مثلث با مساحت‌های برابر تقسیم می‌کند.

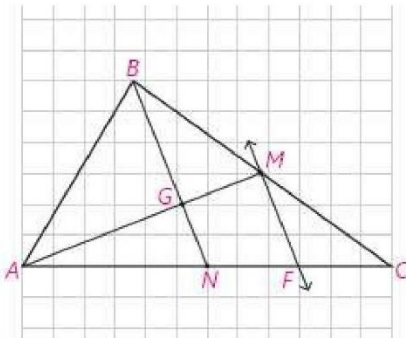
اگر هر نقطه‌ای روی میانه AM باشد M، آیا  $S_{FBM} = S_{FMC}$  است؟ چرا؟



الف: در مثلث ABC ارتفاع AH را رسم می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} S_{\Delta ABM} &= \frac{1}{2} AH \times BM \\ S_{\Delta ACM} &= \frac{1}{2} AH \times CM \end{aligned} \right\} \xrightarrow{BM=MC} S_{\Delta ABM} = S_{\Delta ACM}$$

ب: بله زیرا FM نیز میانه BFC است.



فعالیت

در این فعالیت ویژگی مهمی از سه میانه مثلث را ثابت می‌کنید.

دو میانه AM و BN از  $\Delta ABC$  را رسم می‌کنیم. یکدیگر را در نقطه G درون مثلث قطع می‌کنند. از M وسط ضلع BC خطی را موازی میانه BN رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در F قطع کند. چرا F وسط NC است؟ N وسط ضلع AC است؛ بنابراین،  $AF = 2NF$ . چرا؟ در نتیجه،  $AM = 3GM$ . چرا؟

$$\Delta ABCN; MF \parallel BN \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{CF}{FN} = \frac{CM}{MB} = 1 \Rightarrow CF = FN$$

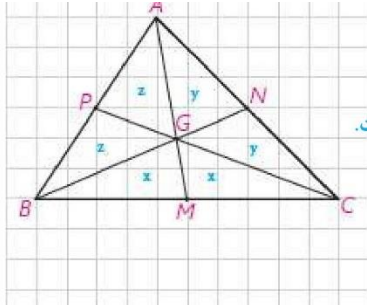
$$AN = NC = 2FN \Rightarrow AF = AN + FN = 2FN + FN = 3FN$$

$$\Delta AMF; MF \parallel GN \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AG}{GM} = \frac{AN}{NF} = 2 \Rightarrow AG = 2GM \Rightarrow AM = 3GM$$

بنابراین،  $GM = \frac{1}{3} AM$  و  $AG = \frac{2}{3} AM$  و G بین A و M است؛ در نتیجه تنها نقطه‌ای روی نیم خط AM است که  $AG = \frac{2}{3} AM$ . مشابه آن ثابت می‌شود  $BG = \frac{2}{3} BN$ . پس برای هر دو میانه دلخواه نقطه G با این ویژگی به دست می‌آید در نتیجه هر سه میانه در G هم‌رس‌اند.

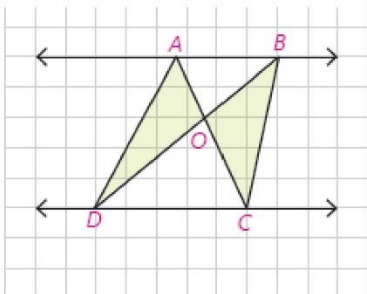
به روش دیگر، می‌توانید از M به N وصل کنید و از تشابه دو مثلث GMN و GAB استفاده کنید؛ چون  $AB = 2MN$  پس  $AG = 2GM$  و  $BG = 2GN$ . اکنون می‌توانید مانند روش قبلی ادامه دهید.

سه میانه هر مثلث در نقطه‌ای درون آن مثلث هم‌رس‌اند؛ به طوری که فاصله این نقطه تا وسط هر ضلع برابر  $\frac{1}{3}$  اندازه میانه نظیر این ضلع است، و فاصله‌اش تا هر رأس  $\frac{2}{3}$  اندازه میانه نظیر آن رأس است.



با رسم سه میانه مثلث نشان دهید، سه میانه مثلث آن را به شش مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کنند. بنا بر فعالیت قبلی  $S_{BGM} = S_{MGC} = x$ . چرا؟ زیرا  $GM$  میانه مثلث  $BGC$  است. به همین ترتیب برای بقیه برقرار است.

اکنون میانه  $AM$  را در نظر بگیرید،  $2z + x = 2y + x$  در نتیجه  $y = \dots$ .  
میانه  $BN$  را در نظر بگیرید،  $2z + y = 2x + y$  در نتیجه،  $z = \dots$ . پس،  $x = y = z$ .



**ویژگی ۳.** فرض کنیم دو خط موازی  $AB$  و  $CD$  موازی باشند؛ به طوری که دو خط

$AC$  و  $BD$  در نقطه‌ای مانند  $O$  متقاطع باشند. می‌دانیم:  $S_{ADC} = S_{BDC}$   
چگونه از آن نتیجه می‌گیرید،  $S_{OAD} = S_{OBC}$ ؟

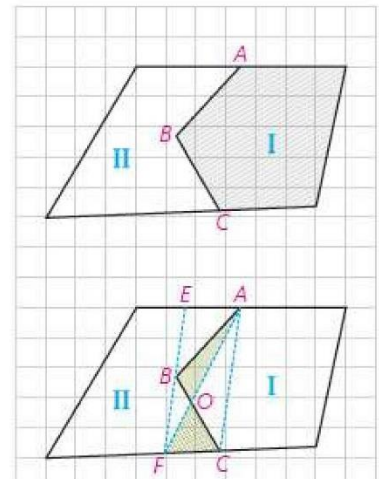
این ویژگی که در هر دوزنقه نیز برقرار است، در حل مسائل کاربرد خوبی دارد.

$$S_{\Delta ACD} = S_{\Delta BCD} \Rightarrow S_{\Delta ACD} - S_{\Delta OCD} = S_{\Delta BCD} - S_{\Delta OCD} \Rightarrow S_{\Delta AOD} = S_{\Delta BOC}$$

یک مسئله.

در شکل دو مزرعه  $I$  و  $II$  متعلق به دو کشاورز است. این دو کشاورز برای استفاده از ماشین‌های کشاورزی می‌خواهند مرز مشترک  $ABC$  بین دو زمین خود را به یک پاره خط مستقیم تبدیل کنند به طوری که مساحت‌های زمین‌های آنها تغییر نکند. چگونه شما می‌توانید این کار را برای آنها انجام دهید؟ فکر اصلی این عمل براساس مسئله قبلی است.

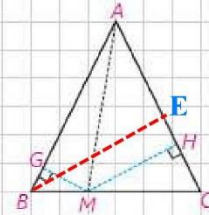
از  $A$  به  $C$  متصل، و از  $B$  موازی خط  $AC$  رسم کنید تا دو مرز دیگر را در  $E$  و  $F$  قطع کند. اکنون نشان دهید این مرز مشترک جدید می‌تواند مرز  $AF$  باشد؛ چرا؟ البته می‌تواند مرز  $EC$  نیز باشد.



زیرا دو پاره خط  $AC, BF$  موازی و  $AF, BC$  یکدیگر را در نقطه  $O$  قطع کرده اند پس بنا به قضیه قبل  $S_{AOAB} = S_{AOFC}$

با توجه به اینکه چهار ضلعی  $AEBC$  نیز دوزنقه می‌باشد و به روش مشابه می‌توان به جای  $AF, BC$  از  $EC, AB$  استفاده کرد.

در مثلث متساوی‌الساقین  $ABC$  که  $AB = AC$  است؛ نقطه دلخواه  $M$  را روی ضلع  $BC$  بین  $B$  و  $C$  در نظر بگیرید. از  $M$  دو عمود  $MH$  و  $MG$  را به ترتیب بر دو ساق  $AC$  و  $AB$  رسم کنید.  $S_{AMB}$  و  $S_{AMC}$  را بنویسید. مساحت مثلث  $\triangle ABC$  را نیز وقتی پاره‌خط  $AB$  یا  $AC$  قاعده باشند، بنویسید. چه رابطه‌ای بین این مساحت‌ها وجود دارد؟ آن را بنویسید. از این رابطه چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

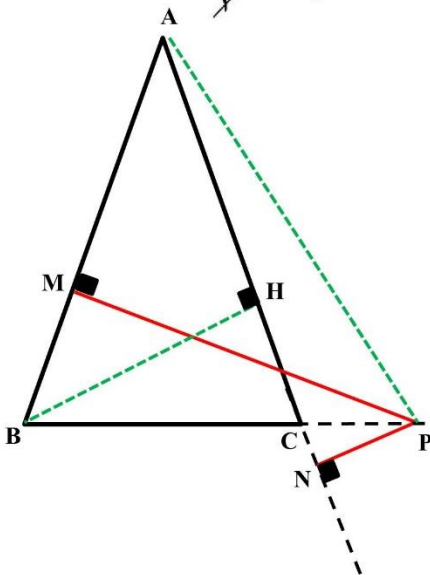


در هر مثلث متساوی‌الساقین  $ABC$  که  $AB=AC$  است، مجموع فاصله‌های هر نقطه روی قاعده  $BC$  از  $AC$  و  $AB$  برابر ارتفاع وارد بر ساق مثلث است

$$S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} AB \times MG, \quad S_{\triangle ACM} = \frac{1}{2} AC \times MH, \quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \times BE$$

$$S_{\triangle ABM} + S_{\triangle ACM} = S_{\triangle ABC} \xrightarrow{AB=AC} \frac{1}{2} AC \times MG + \frac{1}{2} AC \times MH = \frac{1}{2} AC \times BE$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} AC \times (MG + MH) = \frac{1}{2} AC \times BE \Rightarrow MG + MH = BE$$



به همین ترتیب نشان دهید در هر مثلث متساوی‌الساقین  $ABC$ ، قدرمطلق تفاضل فاصله‌های هر نقطه روی امتدادهای قاعده  $BC$  از خط‌های شامل دو ساق برابر اندازه ارتفاع وارد بر ساق است.

فرض کنیم  $P$  نقطه‌ای روی امتداد ضلع  $BC$  باشد. اگر  $PM$  و  $PN$  فاصله‌های نقطه  $P$  از دو ساق مثلث  $ABC$  ( $AB = AC = a$ ) باشند. پاره خط  $AP$  و ارتفاع  $BH$  از مثلث  $ABC$  را رسم می‌کنیم.

$$S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} AB \times PM, \quad S_{\triangle ACP} = \frac{1}{2} AC \times PN, \quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \times BH$$

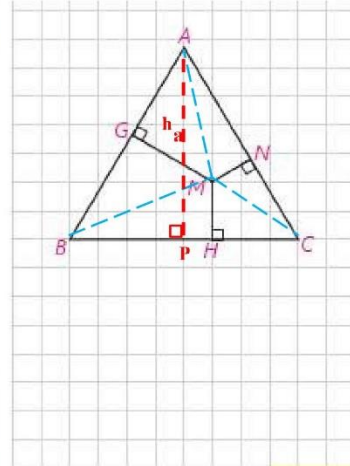
$$|S_{\triangle ABP} - S_{\triangle ACP}| = S_{\triangle ABC} \xrightarrow{AB=AC=a} \left| \frac{1}{2} a \times PM - \frac{1}{2} a \times PN \right| = \frac{1}{2} a \times BH$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} a \times |PM - PN| = \frac{1}{2} a \times BH \Rightarrow |PM - PN| = BH$$

**فعالیت**

نقطه دلخواه  $M$  را درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع با ضلع به اندازه  $a$  در نظر بگیرید. سپس از  $M$  سه عمود بر سه ضلع رسم کنید. از  $M$  به سه رأس مثلث  $ABC$  متصل کنید. مساحت‌های سه مثلث  $MAB$  و  $MBC$ ،  $MAC$  را محاسبه کنید. این مساحت‌ها با مساحت  $\Delta ABC$  چه رابطه‌ای دارند؟ آن را بنویسید. از آن چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$MH + MN + MG = AP \dots$



مجموع فاصله‌های هر نقطه درون مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع برابر ارتفاع مثلث...

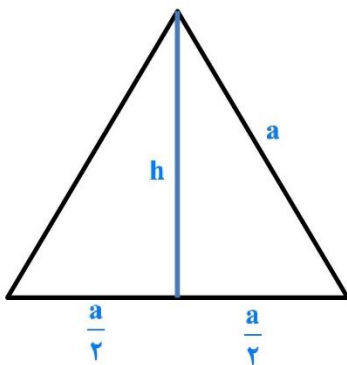
۶۸

$$S_{\Delta AMB} = \frac{1}{2} AB \times MG = \frac{1}{2} a \times MG, \quad S_{\Delta AMC} = \frac{1}{2} AC \times MN = \frac{1}{2} a \times MN, \quad S_{\Delta BMC} = \frac{1}{2} BC \times MH = \frac{1}{2} a \times MH$$

$$S_{\Delta AMB} + S_{\Delta AMC} + S_{\Delta BMC} = S_{\Delta ABC} \Rightarrow \frac{1}{2} a \times MG + \frac{1}{2} a \times MN + \frac{1}{2} a \times MH = \frac{1}{2} a \times AP \Rightarrow MG + MN + MH = h_a$$

سوال بالای صفحه ۶۹

اگر در یک مثلث متساوی‌الاضلاع فاصله‌های نقطه  $M$  درون مثلث از سه ضلع، برابر  $۲$ ،  $۴$  و  $۶$  باشند. اندازه ضلع مثلث را محاسبه کنید.



$$h = 2 + 4 + 6 = 12$$

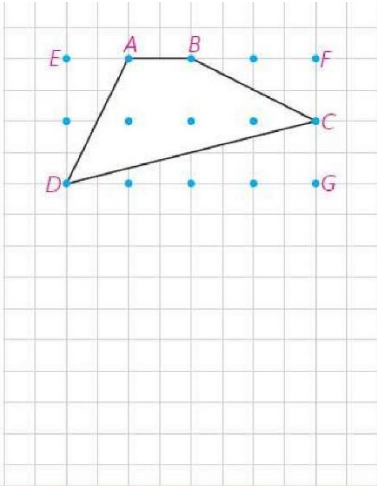
$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow 12^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$\Rightarrow 144 = \frac{3}{4} a^2 \Rightarrow a^2 = 192 \Rightarrow a = \sqrt{192} = 8\sqrt{3}$$



اهتمام ادبی (واحد آزمون‌های آنلاین)

<https://exam.ehtemameadabi.ir>



مطابق شکل نقطه‌ها روی خط‌های افقی و عمودی واقع‌اند؛ به طوری که فاصله هر دو نقطه متوالی روی یک خط افقی (عمودی) برابر واحد است. چنین نقاطی را نقاط شبکه‌ای و چندضلعی‌هایی مانند ABCD را که تمام رأس‌های آنها روی نقاط شبکه‌ای واقع‌اند، چندضلعی‌های شبکه‌ای می‌نامند.

نقاط شبکه‌ای روی رأس‌ها و ضلع‌های چندضلعی را نقاط مرزی و نقاط شبکه‌ای درون چندضلعی‌ها را نقاط درونی شبکه‌ای برای چندضلعی شبکه‌ای می‌نامند.

به طور مثال در شکل بالا چهارضلعی ABCD یک چهارضلعی شبکه‌ای است که دارای ۴ نقطه مرزی و ۳ نقطه درونی شبکه‌ای است.

در این چهارضلعی، شبکه‌ای با به کار بردن مساحت مثلث‌های قائم‌الزاویه و مستطیل نشان دهید مساحت چهارضلعی ABCD برابر ۴ واحد سطح است.

$$S_{\square DEFG} = 4 \times 2 = 8$$

$$S_{\triangle AED} = S_{\triangle BCF} = \frac{1 \times 2}{2} = 1, S_{\triangle CDG} = \frac{4 \times 1}{2} = 2$$

$$S_{\square ABCD} = 8 - (1 + 1 + 2) = 4$$

فعالیت صفحه ۶۹

### فعالیت

- ۱- یک چندضلعی شبکه‌ای حداقل چند نقطه مرزی می‌تواند داشته باشد؟ چرا؟ حداقل ۳ نقطه مرزی - زیرا برای رسم مثلث شبکه‌ای حداقل به سه نقطه نیاز داریم
- ۲- یک چندضلعی شبکه‌ای حداقل چند نقطه درونی می‌تواند داشته باشد؟ صفر

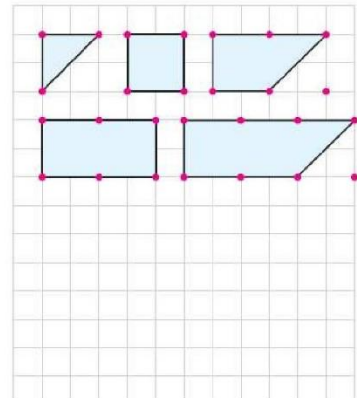
جدول زیر را با محاسبه مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای کامل کنید.

$i = 0, b = 3, 4, 5, \dots$

تعداد نقاط مرزی $i$	۳	۴	۵	۶	۷	۸
مساحت	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{3}{2}$	۲	$\frac{5}{2}$	۳

بین مساحت و تعداد نقاط مرزی چه رابطه‌ای وجود دارد؟

$$S = \frac{b}{2} - \dots + 0$$



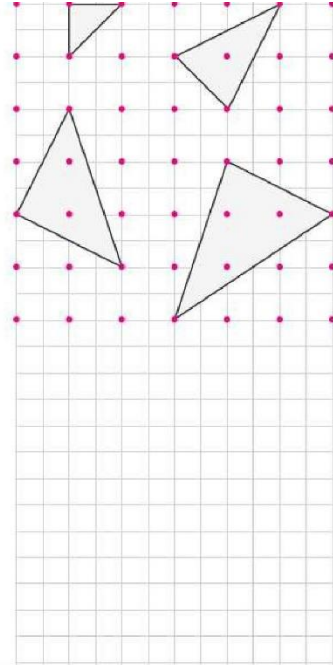


## اهتمام ادبی (واحد آزمون‌های آنلاین)

<https://exam.ehtemadadabi.ir>

۲- اکنون نقاط مرزی را ثابت نکه دارید و نقاط درونی را تغییر دهید. فرض کنید تعداد نقاط مرزی شبکه‌ای  $b=3$  باشند. با توجه به شکل‌ها جدول زیر را کامل کنید. (نتیجه‌گیری  $S = \frac{b}{2} - 1 + i$  را که در قسمت (۳) پیدا کرده‌اید در نظر داشته باشید.)

تعداد نقاط درونی $i$	۰	۱	۲	۳	۴	۵
$\frac{b}{2} - 1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$S$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$



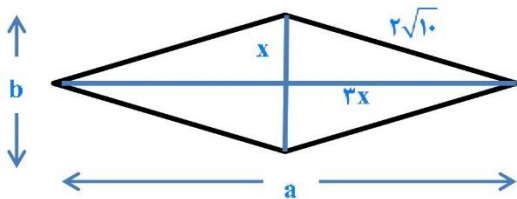
با تکمیل جدول بالا و مقایسهٔ اعداد هر ستون تشخیص دهید که مساحت هر چندضلعی شبکه‌ای با تعداد نقاط مرزی و درونی چه ارتباطی دارد. از این جدول نتیجه بگیرید  $b$  و  $i$  با چه ضرب‌هایی ظاهر می‌شوند.

$$S = \frac{b}{2} - 1 + i$$

کاردکلاس صفحه ۷۱

$S_A = 3 \times 4 = 12$   
 $S_B = \frac{4 \times 6}{2} = 12$   
 $S_C = \frac{4 \times (1 + 5)}{2} = 12$   
 $S_D = 4 \times 3 = 12$

چندضلعی	A	B	C	D
تعداد نقاط مرزی $b$	۱۴	۱۲	۱۰	۸
تعداد نقاط درونی $i$	۶	۷	۸	۹
مساحت	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲

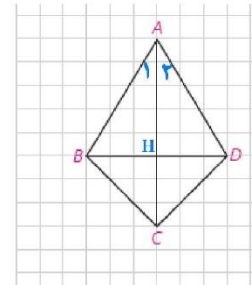


۱- در یک لوزی اندازه هر ضلع  $2\sqrt{10}$  و نسبت اندازه‌های دو قطر  $\frac{1}{3}$  است. مساحت لوزی را پیدا کنید.

$$x^2 + (3x)^2 = (2\sqrt{10})^2 \Rightarrow x^2 + 9x^2 = 40 \Rightarrow 10x^2 = 40 \Rightarrow x^2 = 4$$

$$\Rightarrow x = 2 \Rightarrow a = 12, b = 4 \Rightarrow S = \frac{1}{2} \times 12 \times 4 = 24$$

۲- در چهارضلعی ABCD، مطابق شکل  $AB = AD$  و  $BC = CD$  است. آیا قطرهای این چهارضلعی برهم عموداند؟ چرا؟ نشان دهید در این چهارضلعی قطر AC روی نیمسازهای  $\angle A$  و  $\angle C$  است. اگر اندازه‌های دو قطر ۸ و ۶ باشند، مساحت آن را محاسبه کنید. چهارضلعی‌ای با این ویژگی کایت نام دارد. نشان دهید در کایت یک قطر عمودمنصف قطر دیگر است.



$$\left. \begin{array}{l} AB = AD \\ CB = CD \\ AC = AC \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta ACD \Rightarrow \angle A_1 = \angle A_2$$

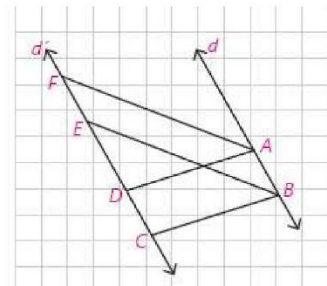
$$\left. \begin{array}{l} AB = AD \\ \angle A_1 = \angle A_2 \\ AH = AH \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABH \cong \Delta ADH \Rightarrow \angle H_1 = \angle H_2 = 90^\circ$$

$$AC \perp BD \Rightarrow S_{\square ABCD} = \frac{1}{2} AC \times BD = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24$$

۳- در شکل دو خط  $d$  و  $d'$  موازی اند و ABCD و ABEF هر دو متوازی الاضلاع اند. اگر مساحت یکی از این متوازی‌الاضلاع‌ها برابر S باشد، مساحت دیگری بر حسب S چقدر است؟

فرض کنیم فاصله دو خط موازی  $d$  و  $d'$  برابر  $h$  باشد در این صورت:

$$S_{\square ABCD} = S_{\square ABEF} = AB \times h$$



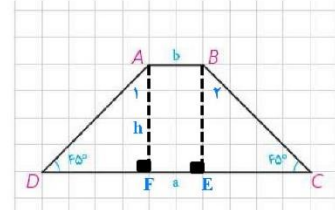




اهتمام ادبی (واحد آزمون‌های آنلاین)

<https://exam.ehtemadadabi.ir>

۴- در دوزنقه شکل مقابل اندازه‌های دو قاعده  $a$  و  $b$  و اندازه‌های دو زاویه مجاور به یک قاعده  $45^\circ$  است. مساحت دوزنقه را بر حسب  $a$  و  $b$  محاسبه کنید. از  $A$  و  $B$  بر قاعده  $DC$  عمود کنید.



عمودهای  $BF$  و  $AF$  را بر  $CD$  وارد می‌کنیم چهارضلعی  $ABCD$  مستطیل است پس:

$$AB = EF = b$$

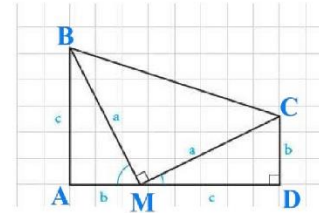
$$\triangle ADF; \angle A_1 = \angle D = 45^\circ \Rightarrow AF = DF = h$$

$$\triangle BCE; \angle B_1 = \angle C = 45^\circ \Rightarrow BE = CE = h$$

$$\Rightarrow CD = 2h + b = a \Rightarrow h = \frac{a-b}{2}$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(a+b)h \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{a+b}{2} \times \frac{a-b}{2} = \frac{a^2 - b^2}{2}$$

۵- مساحت دوزنقه مقابل را به دو طریق به دست آورید. از مساوی قرار دادن آنها چه نتیجه‌ای به دست می‌آید؟



$$S_{\square ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD) \times AD = \frac{1}{2}(b+c)(b+c) = \frac{1}{2}(b+c)^2$$

$$S_{\square ABCD} = S_{\triangle ABM} + S_{\triangle CDM} + S_{\triangle BMC} = \frac{1}{2}bc + \frac{1}{2}bc + \frac{1}{2}c^2 = bc + \frac{1}{2}a^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(b+c)^2 = bc + \frac{1}{2}a^2 \xrightarrow{\times 2} (b+c)^2 = 2bc + a^2$$

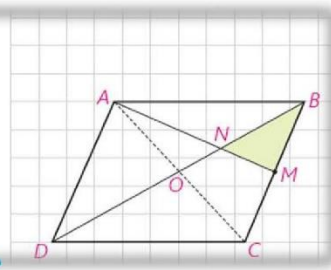
$$\Rightarrow b^2 + 2bc + c^2 = 2bc + a^2 \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$$

۶- در متوازی‌الاضلاع  $ABCD$ ،  $M$  وسط ضلع  $BC$  است و پاره خط  $AM$  قطر  $BD$  را در  $N$  قطع کرده است. نشان دهید:

$$S_{BMN} = \frac{1}{12} S_{ABCD}$$

$$\triangle ABC \cong \triangle ACD \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} S_{\square ABCD} \quad \boxed{1}$$

میان‌های هر مثلث آن را به شش قسمت با مساحت‌های مساوی تقسیم می‌کنند:



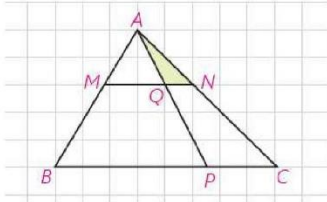
$$\triangle ABC; BM = MC, AO = OC \Rightarrow S_{\triangle MNB} = \frac{1}{6} S_{\triangle ABC} \quad \boxed{2}$$

$$\boxed{1}, \boxed{2} \Rightarrow S_{\triangle MNB} = \frac{1}{6} \left( \frac{1}{2} S_{\square ABCD} \right) = \frac{1}{12} S_{\square ABCD}$$



اهتمام ادبی (واحد آزمون‌های آنلاین)

<https://exam.ehtemadadabi.ir>



۷- در مثلث  $ABC$ ، خط موازی ضلع  $BC$  است و  $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{2}$  . همچنین  $\frac{PC}{PB} = \frac{1}{3}$  است.  $S_{\triangle AQC}$  و  $S_{\square MQPB}$  چه کسری از مساحت مثلث  $ABC$  است؟

$$\frac{PC}{PB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{PC}{BC} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{S_{\triangle APC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = 4S_{\triangle APC} \quad \boxed{1}$$

$$\triangle ABC; MN \parallel BC \Rightarrow \begin{cases} \frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{3} \\ \triangle AQC \sim \triangle APC \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle ANQ}}{S_{\triangle APC}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow S_{\triangle APC} = 9S_{\triangle ANQ} \quad \boxed{2}$$

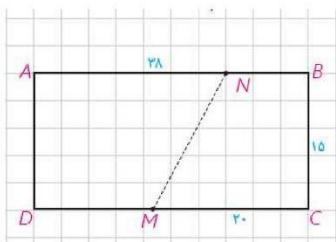
$$\boxed{1}, \boxed{2} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = 9(4S_{\triangle APC}) = 36S_{\triangle APC} \Rightarrow \frac{S_{\triangle APC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{36}$$

$$\frac{PB}{BC} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{S_{\triangle APB}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{3}{4} \Rightarrow S_{\triangle APB} = \frac{3}{4}S_{\triangle ABC}$$

$$\triangle ABC; MQ \parallel BP \Rightarrow \triangle AQM \sim \triangle ABP$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle AMQ}}{S_{\triangle ABP}} = \left(\frac{AM}{AB}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow S_{\triangle ABP} = 9S_{\triangle AMQ} \Rightarrow S_{\square BPQM} = \frac{1}{9}S_{\triangle ABP} \quad \boxed{2}$$

$$\boxed{1}, \boxed{2} \Rightarrow S_{\square BPQM} = \frac{1}{9}\left(\frac{3}{4}S_{\triangle ABC}\right) = \frac{1}{12}S_{\triangle ABC} \Rightarrow \frac{S_{\square BPQM}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{12}$$



۸- زمین مستطیل شکلی به ابعاد ۳۸ و ۱۵ متر که دو نفر به طور مساوی در آن شریک‌اند، مفروض است. این زمین فقط از نقطه  $M$  که  $MC = 20$  است به یک کوچه راه دارد. مرز  $MN$  را چگونه رسم کنیم تا زمین به دو قطعه با مساحت‌های مساوی بین آن دو تقسیم شود.

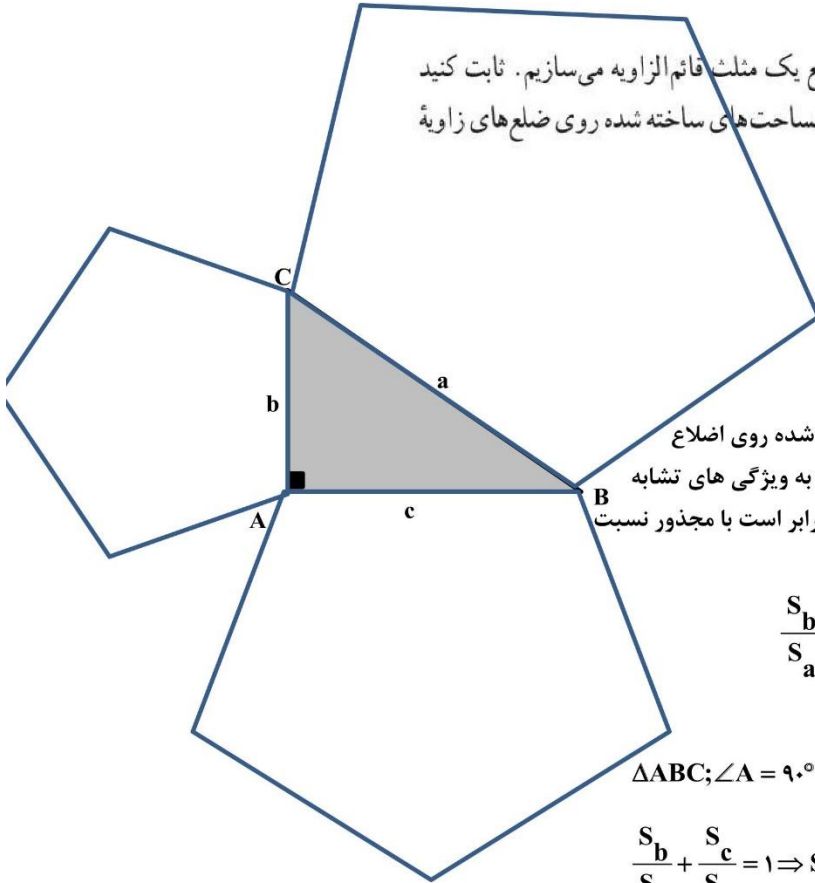
کافی است نقطه  $N$  را روی ضلع  $AB$  چنان اختیار کنیم که  $AN = 20$  در این صورت دو ذورنقه با قاعده‌های ۲۰ و ۱۸ و ارتفاع ۱۵ تشکیل می‌شود.



اهتمام ادبی (واحد آزمون‌های آنلاین)

<https://exam.ehtemadadabi.ir>

۹- سه چندضلعی متشابه روی سه ضلع یک مثلث قائم‌الزاویه می‌سازیم. ثابت کنید مساحت چندضلعی روی وتر برابر مجموع مساحت‌های ساخته شده روی ضلع‌های زاویه قائمه است.



اگر مساحت چندضلعی‌های متشابه تشکیل شده روی اضلاع  $a, b, c$  را به ترتیب  $S_a, S_b, S_c$  بنامیم بنا به ویژگی‌های تشابه نسبت مساحت‌های دو چندضلعی متشابه برابر است با مجذور نسبت اضلاع متناظر آنها. به عبارت دیگر:

$$\frac{S_b}{S_a} = \left(\frac{b}{a}\right)^2, \frac{S_c}{S_a} = \left(\frac{c}{a}\right)^2$$

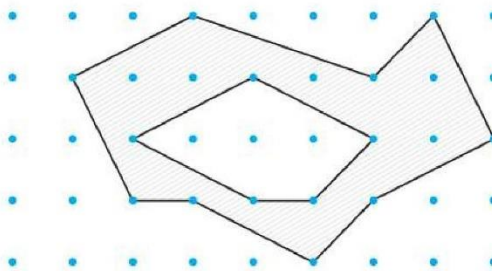
از طرف دیگر:

$$\Delta ABC; \angle A = 90^\circ \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{S_b}{S_a} + \frac{S_c}{S_a} = 1 \Rightarrow S_b + S_c = S_a$$

۱۰- با توجه به مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای، مساحت قسمت سایه‌زده را

محاسبه کنید.



$$b = 14, i = 5, S = \frac{b}{2} - 1 + i \\ \Rightarrow S = 7 - 1 + 5 = 11$$



اهتمام ادبی (واحد آزمون‌های آنلاین)

<https://exam.ehtemameadabi.ir>

۱۱- یک مستطیل شبکه‌ای با ضلع‌های افقی و قائم که اندازه‌های ضلع‌های آن  $m$  و  $n$  واحداند مفروض است. مساحت آن را ابتدا به روش معمول و سپس به کمک فرمول پیک محاسبه و آنها را مقایسه کنید.

مساحت به روش معمول :  $S = m \times n$

مساحت به کمک قضیه پیک :

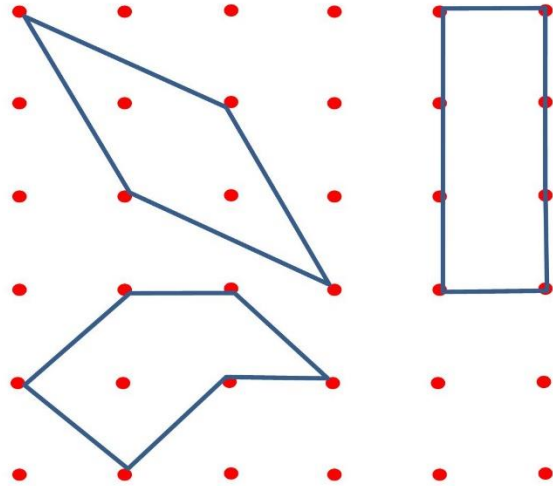
$$b = 2m + 2n$$

$$i = (m+1) \times (n+1) - (2m + 2n) = mn - m - n + 1$$

$$S = \frac{b}{2} - 1 + i = \frac{2m + 2n}{2} - 1 + (mn - m - n + 1) = m + n - 1 + mn - m - n + 1 = mn$$

۱۲- مساحت یک چندضلعی شبکه‌ای ۳ واحد است. جدولی تشکیل دهید و تعداد نقاط مرزی و تعداد نقاط درونی را در حالت‌هایی که امکان دارد، مشخص کنید. اگر این چندضلعی شبکه‌ای مثلث باشد در هر حالت شکل آن را رسم کنید. در حالتی که نقاط مرزی بیشترین تعداد ممکن را دارند، شکل‌های چهارضلعی‌های نظیر آن را نیز رسم کنید.

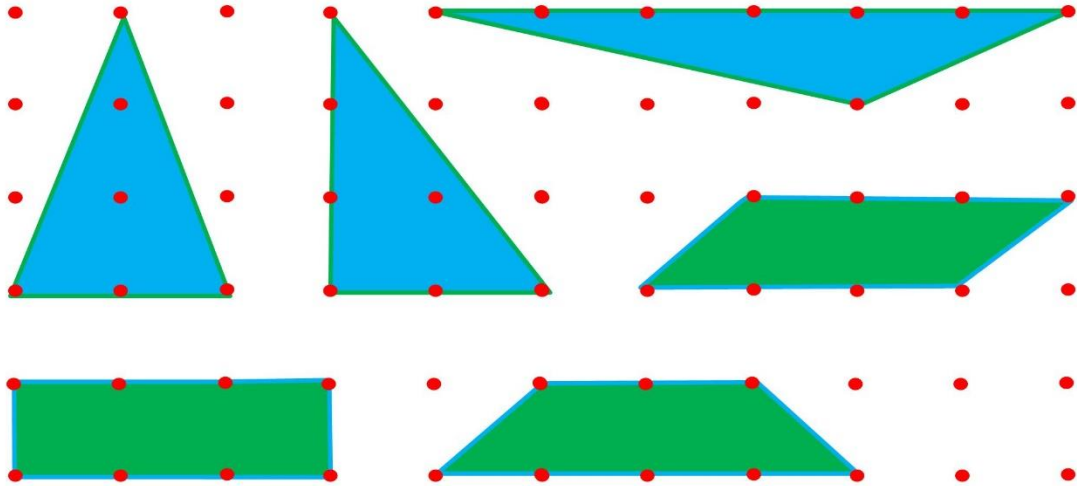
$b$	۴	۶	۸
$i$	۲	۱	۰
$S = \frac{b}{2} - 1 + i$	۳	۳	۳





اهتمام ادبی (واحد آزمون‌های آنلاین)

<https://exam.ehtemameadabi.ir>



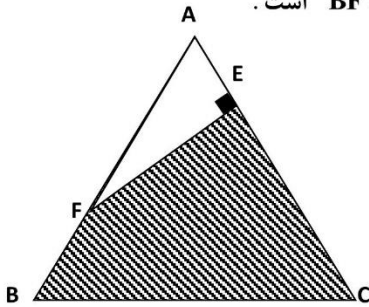


تمرینات تکمیلی :

۱- ثابت کنید مساحت هر ذوزنقه برابر است با حاصل ضرب اندازه یک ساق در فاصله ی آن از وسط ساق دیگر.

۲- در شکل مقابل مثلث  $ABC$  متساوی الاضلاع و  $EF = 2\sqrt{3}$  ,  $BF = 2$  است.

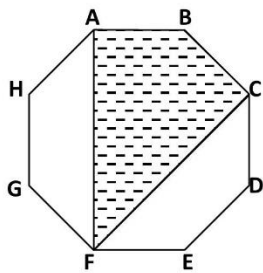
مساحت ناحیه سایه زده را حساب کنید.



۳- اگر هشت ضلعی مقابل ، منتظم و محیط آن برابر ۳۲ باشد . و قطر های

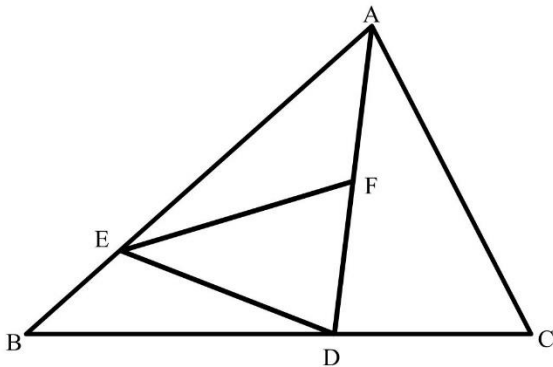
FA و FC زاویه ی EFG را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده باشند .

مساحت چهار ضلعی ABCF را حساب کنید ؟

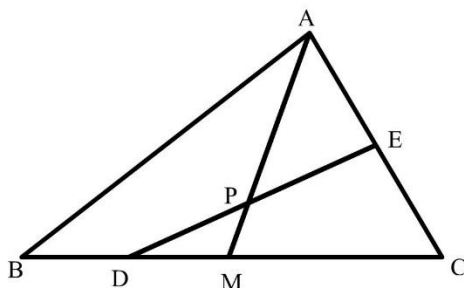


۴- در شکل مقابل مساحت  $\triangle ABC$  برابر ۹۰ سانتی متر مربع و  $BD = 2DC$  ,  $BE = \frac{1}{4}EA$  و نقطه ی F وسط

پاره خط AD است . مساحت  $\triangle DEF$  را حساب کنید.



۵- در شکل مقابل AM میانه وارد بر BC است دهید اگر  $S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle ACDE}$  آنگاه  $AP \times EP = DP \times MP$

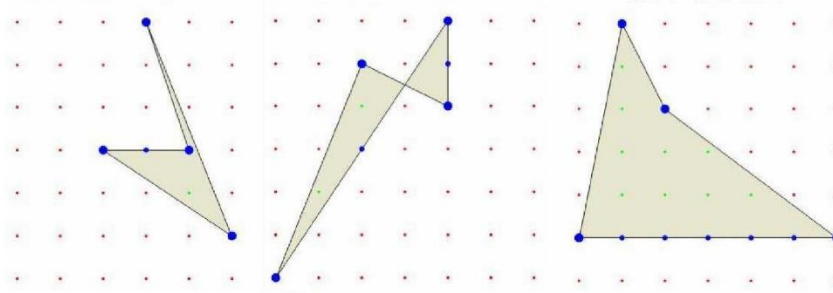




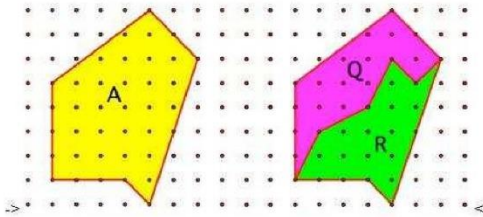
اهتمام ادبی (واحد آزمون‌های آنلاین)

<https://exam.ehtemadadabi.ir>

۶- مساحت هر یک از شکل‌های زیر را به کمک قضیه پیک حساب کنید.



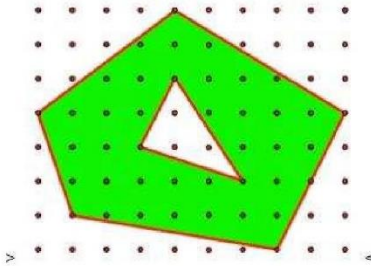
۷- در صفحه مختصات نقطاتی که طول و عرض آنها اعداد صحیح می‌باشند را علامت گذاشته ایم. مربعی که هیچ یک از این نقاط، نقطه درونی نباشد. حداکثر چه مساحتی دارد؟ آیا اگر این سوال را به کمک قضیه پیک حل می‌کردیم جواب نهایی تغییر می‌کرد؟ چرا؟



۸- به کمک قضیه پیک در شکل مقابل درستی یا نادرستی رابطه زیر را بررسی کنید:

$$S_Q + S_R = S_A$$

۹- به کمک قضیه پیک در شکل مقابل درستی یا نادرستی رابطه زیر را بررسی کنید:



مساحت قسمت رنگی = مساحت رنگ نشده - مساحت کل شکل



اهتمام ادبی (واحد آزمون‌های آنلاین)

<https://exam.ehtemameadabi.ir>

نقد و بررسی :

- ❖ اگر چه دانش آموز در دوره متوسطه اول با مساحت آشنا شده است ولی چیزی از اهمیت لزوم تعریف مساحت کم نمی کند . بهتر بود تعریف مساحت و اثبات فرمول های مساحت چند ضلعی های متعارف بررسی می شد.
- ❖ مساحت مثلث متساوی الاضلاع صفحه ۶۵ ارائه شده ولی هیچ مساله ی یا کاربردی برای مساحت مثلث متساوی الاضلاع بیان نشده است.
- ❖ همرسی سه میانه در فعالیت صفحه ۶۷ به روشی بسیار زیبا ثابت شده ولی در مورد کاربردهای فراوان این قضیه در حل مسائل هیچ اشاره ای نشده است.
- ❖ ایده استفاده از قضیه پیک در کتاب درسی بسیار پسندیده است و بهتر است که از این قضیه در سالهای بعد نیز استفاده شود.





اهتمام ادبی (واحد آزمون‌های آنلاین)  
<https://exam.ehtemameadabi.ir>

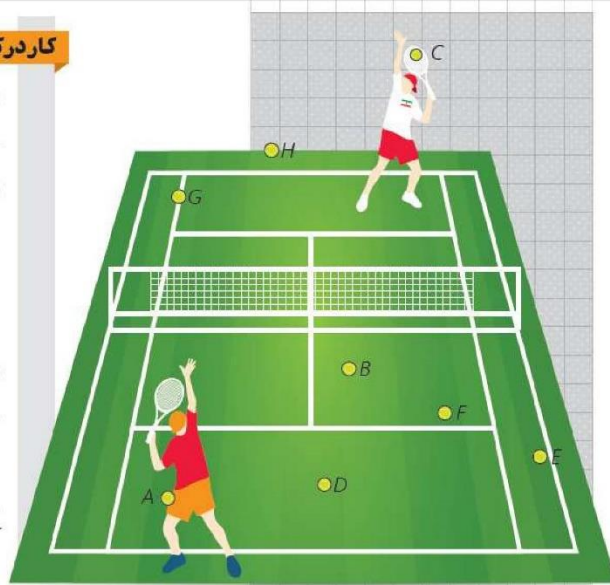
## فصل ۴

# هندسه دهم



**کاردرکلاس**

به این تصویر دقت کنید. توپ A داخل جیب یکی از بازیکن‌ها و توپ C روی راکت بازیکن دیگر است و بقیه توپ‌های تنیس روی زمین افتاده‌اند.



الف) سه توپ نام ببرید که در یک راستا هستند.

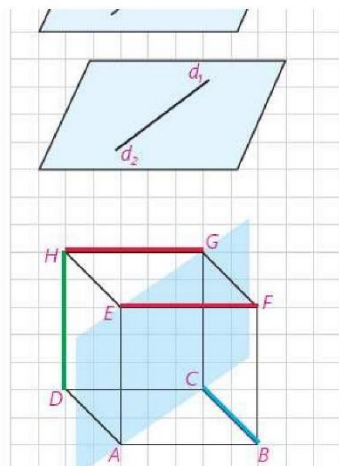
**B, F, E**

ب) سه توپ نام ببرید که در یک صفحه‌اند ولی هم راستا نیستند.

**B, F, D**

ج) چهار توپ نام ببرید که همگی در یک صفحه نیستند.

**B, F, D, C**



**فعالیت**

مکعب رویه‌رو را در نظر بگیرید.

در هر مورد وضعیت دو خط را نسبت به هم مشخص کنید و بنویسید که آیا می‌توان صفحه‌ای شامل آن دو در نظر گرفت؟

متقاطع : HD و HG

موازی : HG و EF

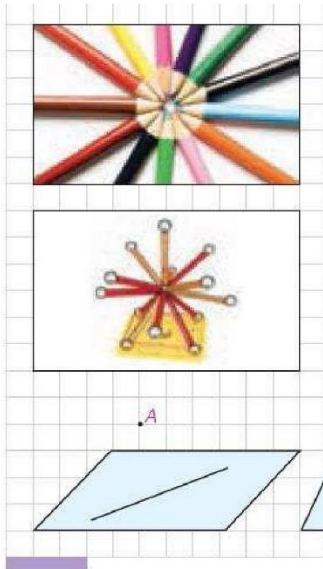
متقاطع : FD و EC

موازی : GC و EA

متنافر : AB و GD

متنافر : BC و HD

**تعریف:** دو خط را که نقطه اشتراکی ندارند، در نظر بگیرید:



دو خط در فضا نسبت به هم موازی یا ..... یا منطبق یا متنافر هستند. **مقاطع**

**کار در کلاس**

- ۱- به سوالات زیر پاسخ دهید. (می‌توانید از تصاویر کمک بگیرید.)
- در صفحه از هر نقطه چند خط می‌گذرد؟ **بی شمار**
- در فضا چطور؟ **بی شمار**
- در صفحه از یک نقطه غیر واقع بر یک خط، چند خط موازی آن خط می‌توان رسم کرد؟ **یک و تنها یک خط**
- در فضا چطور؟ **یک و تنها یک خط**

۲- در شکل‌های زیر در صورت وجود، به خطوط موازی، مقاطع و متنافر اشاره کنید.



۳- دو خط موازی رسم کنید و آنها را  $d_1$  و  $d_2$  بنامید. حالا خط  $d_3$  را موازی با  $d_1$  رسم کنید. دو خط  $d_1$  و  $d_2$  نسبت به هم چه وضعی دارند؟ **موازی**

**نتیجه ۱:** در یک صفحه دو خط موازی با یک خط ..... موازی اند.....

آیا در فضا نیز این نتیجه برقرار است؟ **بله**

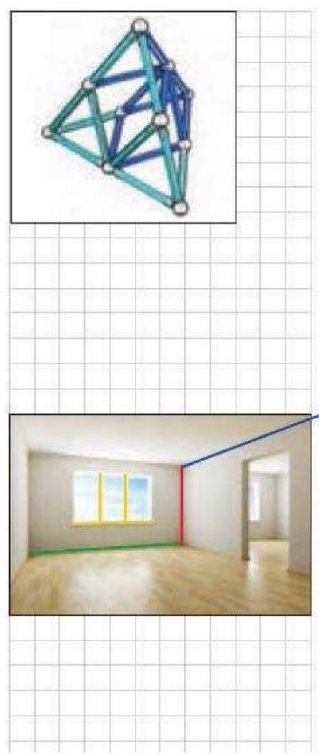
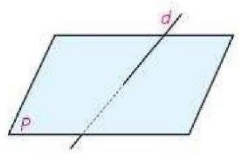
۴- می‌دانیم که در صفحه دو خط عمود بر یک خط، با هم موازی‌اند.

آیا در فضا هم این رابطه برقرار است؟ **خیر**

۵- خط  $d$  با صفحه  $P$  متقاطع است.

خط‌های موجود در صفحه  $P$  نسبت به خط  $d$  چه وضعیت‌هایی می‌توانند داشته باشند؟

**مقاطع یا متنافر**





اهتمام ادبی (واحد آزمون‌های آنلاین)

<https://exam.ehtemameadabi.ir>

### ■ حالت‌های مختلف خط و صفحه

▶ مدادتان را طوری در دست بگیرید که مداد یا امتداد آن، صفحه میز را قطع نکند.

اگر خط و صفحه با هم اشتراکی نداشته باشند، نسبت به هم **موازی** هستند.

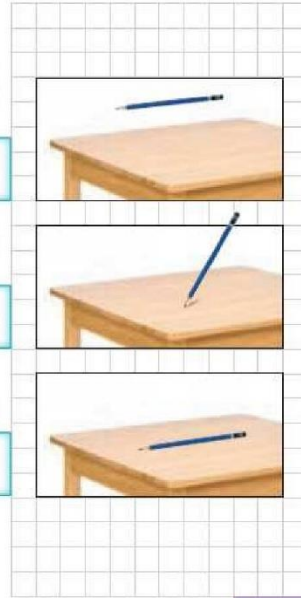
▶ نوک مداد را روی میز بگذارید. در این حالت، مدادتان در یک نقطه با میز اشتراک دارد.

اگر خط و صفحه در یک نقطه مشترک باشند، نسبت به هم **مبتقاطع** هستند.

▶ مدادتان را روی میز قرار دهید.

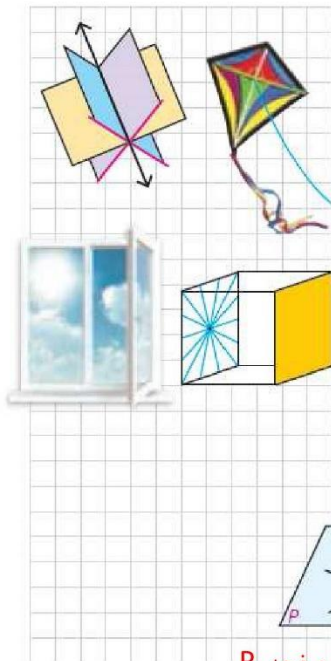
اگر خط و صفحه بی‌شمار نقطه اشتراک داشته باشند خط بر صفحه واقع است.

خط و صفحه در فضا نسبت به هم **موازی** یا **مبتقاطع** هستند یا خط بر صفحه **واقع** است.



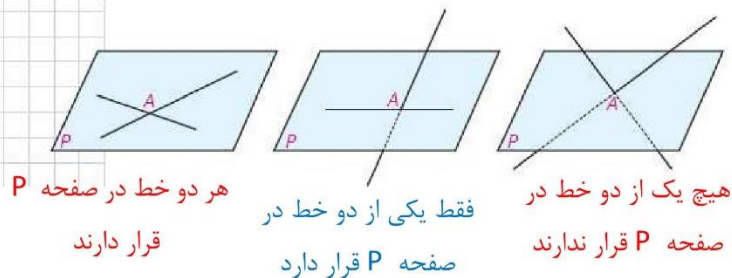
۸۰

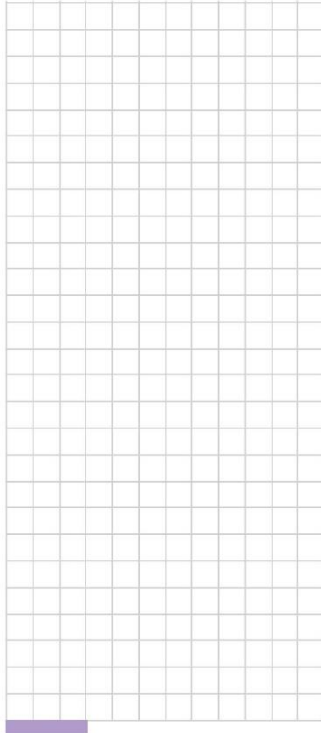
### کاردرکلاس



- ۱- به سؤالات زیر پاسخ دهید. (می‌توانید از تصاویر کمک بگیرید.)
  - از یک خط در فضا چند صفحه می‌گذرد؟ **بی شمار**
  - از دو خط متقاطع چند صفحه می‌گذرد؟ **یک و تنها یک صفحه**
  - از دو خط موازی چطور؟ **یک و تنها یک صفحه**
  - از یک نقطه غیرواقع بر یک صفحه، چند خط موازی با آن صفحه می‌توان رسم کرد؟ **بی شمار**

۲- دو خط در نقطه A متقاطع اند و صفحه P شامل نقطه A است. با توجه به شکل‌های زیر حالت‌های مختلف خطوط متقاطع و صفحه P را بررسی کنید.





۸۱

۳- دو خط  $d_1$  و  $d_2$  در فضا با هم موازی اند.  
الف) اگر صفحه‌ای مثل  $P$  با یکی از این دو خط موازی باشد، نسبت به دیگری چه وضعی دارد؟

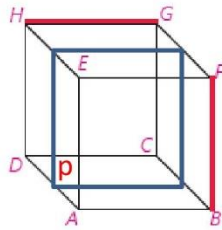
یا با خط دوم موازی است یا خط دوم بر آن واقع است.

ب) اگر صفحه  $P$  شامل یکی از این دو خط باشد، نسبت به دیگری چه وضعیتی دارد؟

یا با خط دیگر موازی است. یا هر دو خط بر آن صفحه قرار دارند

ج) اگر صفحه  $P$  با یکی از این خطوط متقاطع باشد، نسبت به دیگری چه وضعیتی دارد؟  
مقاطع

۴- مسئله قبل را برای حالتی حل کنید که دو خط، متناظرند.



الف) اگر صفحه‌ای با یکی از دو خط متناظر موازی باشد می‌توان سه حالت را در نظر گرفت ۱- با خط دیگر موازی است. مانند صفحه  $P$  و دو خط

۲-  $GH, BF$  با خط دیگر متقاطع است مانند صفحه  $BFG$  و خطهای  $AE, GH$  ۳- خط دیگر بر آن صفحه قرار دارد. مانند صفحه  $BFE$  و خطهای  $AE, GH,$

ج) اگر صفحه‌ای یکی از دو خط متناظر را قطع کند. می‌توان سه حالت را در نظر گرفت ۱- با خط دیگر موازی است. مانند صفحه  $EHD$  و دو خط  $GH, BF$  ۲- با خط دیگر متقاطع است مانند صفحه‌ای که از وسط یال‌های  $GH, BF, EF$  می‌گذرد و دو خط  $GH, BF$  ۳- خط دیگر بر آن صفحه قرار دارد. مانند صفحه  $BFE$  و خطهای  $EH, BF$

ب) اگر صفحه‌ای شامل یکی از دو خط متناظر باشد می‌توان دو حالت را در نظر گرفت ۱- با خط دیگر موازی است. مانند صفحه  $GHD$  و دو خط  $GH, BF$  ۲- با خط دیگر متقاطع است مانند صفحه  $BFG$  و خطهای  $BF, GH$



حالت‌های مختلف دو صفحه

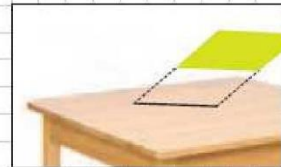
▶ یک برگه را طوری در دست بگیرید که خودش یا امتداد آن صفحه میز را قطع نکند.

اگر دو صفحه با هم نقطه اشتراکی نداشته باشند، نسبت به هم موازی هستند.



▶ برگه را طوری در دست بگیرید که خودش یا امتداد آن صفحه میز را قطع کند. اشتراک صفحه‌ای که برگه قسمتی از آن است، با سطح میز به چه شکلی است؟

اگر دو صفحه در یک خط راست مشترک باشند، نسبت به هم متقاطع هستند. خط راستی که اشتراک دو صفحه متقاطع است، فصل مشترک آن دو صفحه نامیده می‌شود.



▶ برگه را روی میز قرار دهید.

دو صفحه در فضا نسبت به هم موازی یا متقاطع یا منطبق هستند.



کار در کلاس

به این مکعب دقت کنید :

الف) خط‌های GF و DA نسبت به هم چه وضعی دارند؟ موازی

HG و DC چطور؟ موازی

EF و GC چطور؟ متنافر

ب) هر خط با چند خط دیگر متقاطع است؟ چهار خط

با چند خط موازی است؟ سه خط

با چند خط متنافر است؟ چهار خط

ج) HD با کدام صفحه موازی است؟ BFG

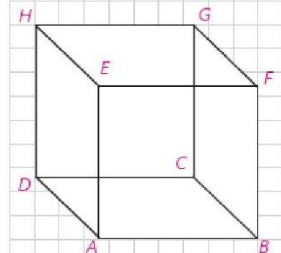
با کدام متقاطع است؟ EFG, ABC

بر کدام منطبق است؟ HAD, HDC

د) دو صفحه موازی و دو صفحه متقاطع نام ببرید.

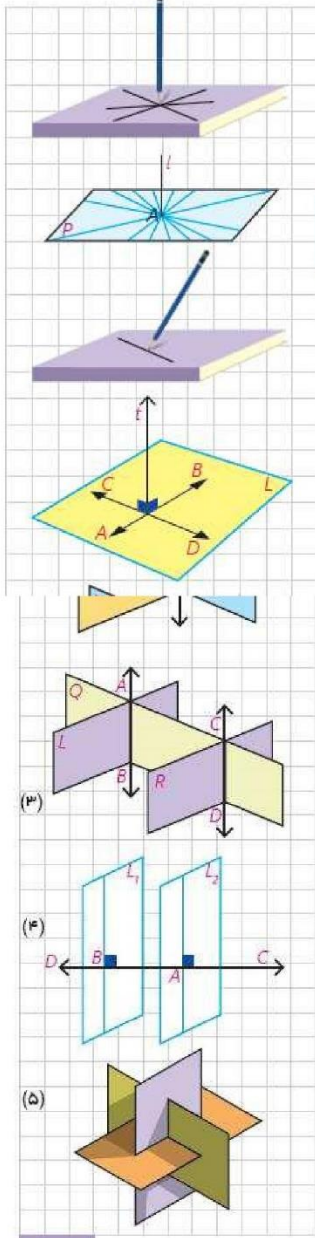
EFG, ABC دو صفحه موازی اند

ABF, ABC دو صفحه متقاطع اند





**تعامد**



نوک مداد خود را مطابق شکل به صورت قائم بر صفحه کتاب نگه دارید. در این حالت مدادتان با بقیه خط‌های موجود در صفحه که از نقطه تقاطع مداد و سطح میز می‌گذرند، چه وضعیتی دارد؟

عمود است

**تعریف:** فرض کنید خط  $l$  در نقطه  $A$  صفحه  $P$  را قطع می‌کند. خط  $l$  بر صفحه  $P$  عمود است؛ هرگاه بر تمام خط‌های صفحه  $P$  که از نقطه  $A$  می‌گذرند، عمود باشد.

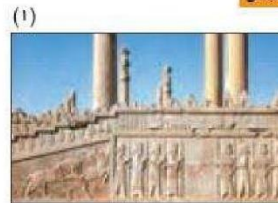
آیا اگر خطی فقط بر یکی از خطوط صفحه‌ای عمود باشد، می‌توانیم بگوییم آن خط به آن صفحه عمود است؟

خیر

می‌توان نشان داد که:

اگر خطی بر دو خط متقاطع از صفحه‌ای، در محل تقاطع عمود باشد، بر آن صفحه عمود است.

**کاردرکلاس**



می‌دانیم که در صفحه، دو خط عمود بر یک خط با هم موازی‌اند.

الف) آیا دو خط عمود بر یک صفحه همیشه با هم موازی‌اند؟ **بله**

ب) آیا دو صفحه عمود بر یک صفحه همیشه با هم موازی‌اند؟ **بله**

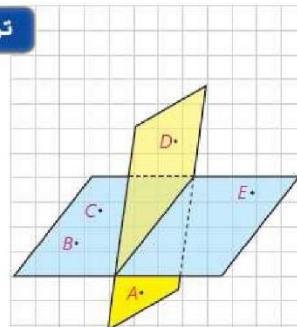
ج) دو صفحه عمود بر یک خط نسبت به هم چه وضعی دارند؟ **موازی‌اند**

د) اگر خطی بر یکی از دو صفحه موازی عمود باشد، نسبت به دیگری چه وضعیتی دارد؟ **عمود است**

ه) اگر یکی از دو خط موازی بر صفحه‌ای عمود باشد، وضعیت خط دوم با صفحه را بررسی کنید. **آن نیز عمود است**



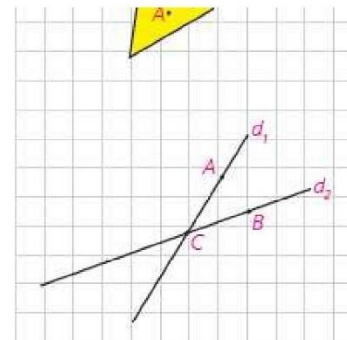
- ۱- با توجه به شکل به سوالات پاسخ دهید:
- الف) چند صفحه در شکل می‌بینید، نام ببرید.
- ب) سه نقطه پیدا کنید که در یک صفحه‌اند.
- ج) چهار نقطه پیدا کنید که در یک صفحه نیستند.
- د) دو خط  $AB$  و  $CE$  نسبت به هم چه وضعی دارند؟  $AC$  و  $CE$  چگونه؟



الف: دو صفحه - صفحه  $BCE$  و صفحه ای که از  $AD$  و فصل مشترک می‌گذرد

ب:  $B, C, E$  ج:  $B, C, E, D$  د: متنافر - متنافر

- ۲- خطوط  $d_1$  و  $d_2$  و نقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  مانند شکل مقابل‌اند. صفحه  $P$  را در حالت‌های زیر در نظر بگیرید و وضعیت نسبی آن را با هر یک از خطوط  $d_1$  و  $d_2$  بررسی کنید.
- الف) صفحه  $P$  شامل نقطه  $C$  است.
- ب) صفحه  $P$  شامل  $A$  و  $C$  باشد؛ ولی شامل  $B$  نباشد.
- ج) صفحه  $P$  شامل نقاط  $C$  و  $B$  و  $A$  است.
- د) صفحه  $P$  شامل خط  $d_1$  و نقطه  $B$  است.



الف: یکی از حالت‌های زیر رخ می‌دهد: ۱- هر دو خط روی صفحه  $P$  قرار دارند. ۲- فقط یکی از دو خط متقاطع روی صفحه  $P$  قرار دارد. و دیگری صفحه  $P$  را در نقطه  $C$  قطع می‌کند ۳- هر دو خط صفحه  $P$  را در نقطه  $C$  قطع می‌کنند.

ب: یکی از حالت‌های زیر رخ می‌دهد: ۱- هر دو خط روی صفحه  $P$  قرار دارند. ۲- فقط خط  $d_1$  روی صفحه  $P$  قرار دارد. و  $d_2$  صفحه  $P$  را در نقطه  $C$  قطع می‌کند.

ج: هر دو خط روی صفحه  $P$  قرار دارند.

د: هر دو خط روی صفحه  $P$  قرار دارند.

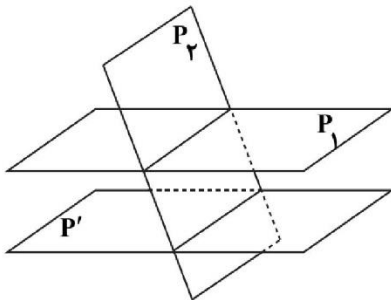




اهتمام ادبی (واحد آزمون‌های آنلاین)

<https://exam.ehtemadadabi.ir>

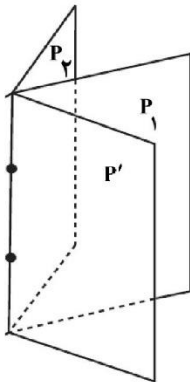
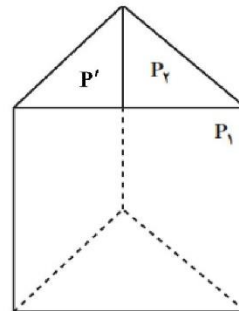
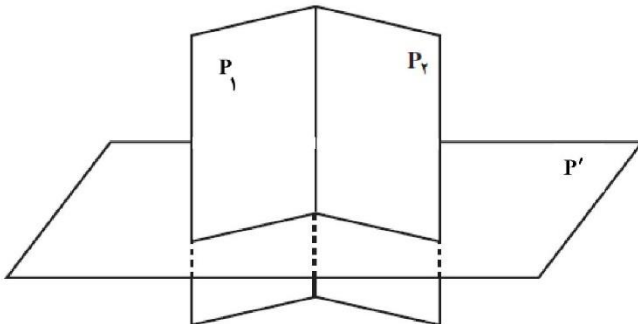
۳- دو صفحه  $P_1$  و  $P_2$  را به گونه‌ای در نظر بگیرید که متقاطع باشند و خط  $d$  فصل مشترک آنها باشد (در هر دو حالت الف و ب تصویر مناسب را رسم کنید).  
الف) اگر صفحه‌ای باشد که با  $P_1$  موازی باشد، نسبت به  $P_2$  چه وضعیتی خواهد داشت.  
ب) اگر صفحه‌ای باشد که با  $P_1$  متقاطع است، با  $P_2$  چه وضعیتی می‌تواند داشته باشد.



الف : صفحه  $P'$  صفحه  $P_1$  را در خطی موازی خط  $d$  قطع

می‌کند.

ب :



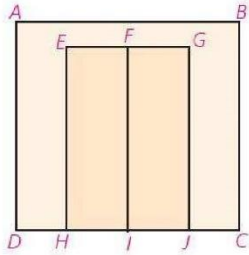


اهتمام ادبی (واحد آزمون‌های آنلاین)

<https://exam.ehtemameadabi.ir>

۴- شکل مقابل یک دیوار و یک در دولنگه را که در دیوار قرار گرفته است، نشان می‌دهد. وضعیت خط‌ها و صفحه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) وضعیت صفحات EFHJ و ABCD و FGJI را دو به دو نسبت به هم بررسی کنید.



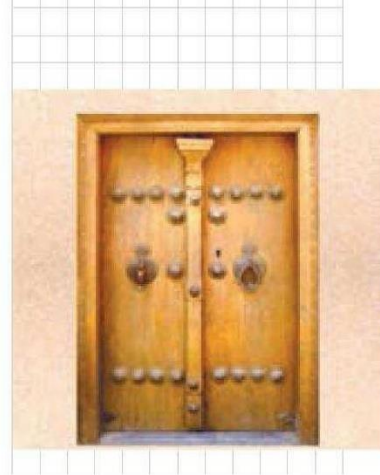
ب) خطوط FI و BC

ج) خطوط AB و FI

د) خطوط EF و FG

ه) خطوط HI و FG

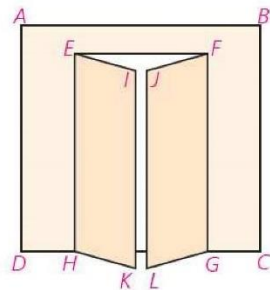
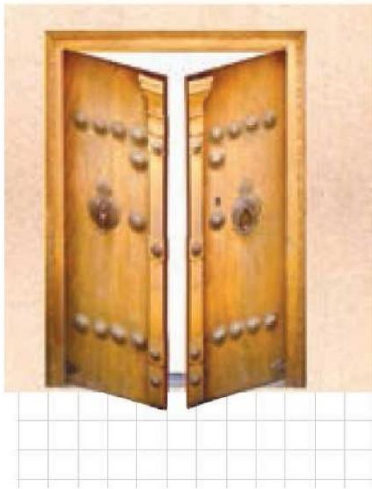
و) یکی از خطوط (به دلخواه) و یکی از صفحات (به دلخواه)



الف: دو صفحه EFHJ, FGJI بر هم منطبق اند و صفحه ABCD با هر دوی آن‌ها موازی است.

ب: موازی - ج: متناظر - د: منطبق - ه: موازی - و: موازی

۵- تجسم کنید دو لنگه در هر کدام  $30^\circ$  باز شده‌اند، وضعیت خط‌ها و صفحه‌های زیر را مشخص کنید.



الف) وضعیت صفحه‌های EIKH و ABCD و

JFGL را دو به دو نسبت به هم بررسی کنید.

ب) خط FJ و صفحه EIKH

ج) خط JL و صفحه EIKH

د) خط EH نسبت به هریک از صفحات

ه) خطوط EI و JF

و) خطوط EI و FG

ت) خطوط BC و FJ

الف: دو به دو متقاطع اند. ب: متقاطع ج: موازی

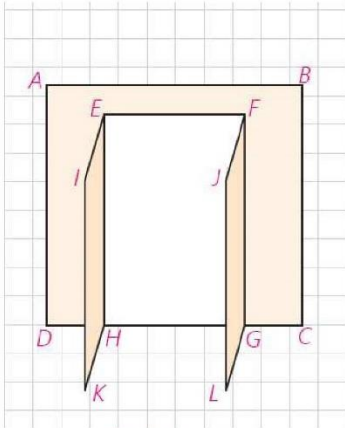
د: خط EH روی دو صفحه ABCD, EIKH قرار دارد و با صفحه JFGL

ه: متقاطع و: متناظر ز: متناظر



اهتمام ادبی (واحد آزمون‌های آنلاین)

<https://exam.ehtemadadabi.ir>



۶- تصور کنید دو لنگه در هر کدام  $90^\circ$  باز شده‌اند. وضعیت خط‌ها و صفحه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) وضعیت صفحات EIKH و ABCD و FGLJ را دو به دو نسبت به هم بررسی کنید.

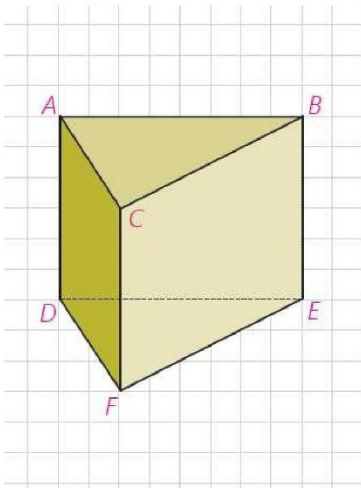
ب) خط FJ و صفحه EIKH موازی

ج) خط JL و صفحه EIKH موازی

د) خطوط EI و FJ موازی

ه) خطوط FJ و HK موازی

الف: دو صفحه ABCD, EIKH متقاطع، دو صفحه ABCD, FGLJ متقاطع، دو صفحه EIKH, EIKH موازی



۷- منشور سه پهلوی زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید:

الف) سه جفت خط متمایز دو به دو موازی نام ببرید. AD, CF, BE

ب) سه جفت خط متمایز دو به دو متناظر نام ببرید. CD, EF, AB

ج) سه جفت خط دو به دو متقاطع نام ببرید. AB, AC, BC

د) سه خط هم‌مس نام ببرید. AB, AC, AD

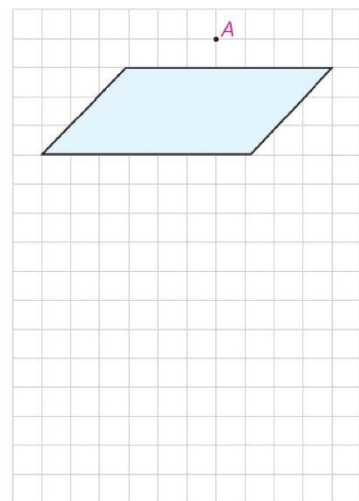
ه) سه جفت خط و صفحه موازی نام ببرید. خطهای AB, AC, BC و صفحه DEF

و) دو صفحه موازی نام ببرید. ABC, DEF

ز) سه صفحه دو به دو متقاطع نام ببرید. ABC, BCFE, ACFD

۸- از هر نقطه غیر واقع بر یک صفحه، چند خط می‌توان به آن صفحه عمود کرد؟

یک و تنها یک خط می‌توان عمود کرد



۹- از هر خط غیر واقع بر یک صفحه، چند صفحه می‌توان گذراند که بر آن صفحه

عمود باشد؟

الف) خط بر صفحه عمود باشد. بی شمار صفحه

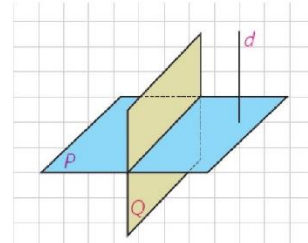
ب) خط بر صفحه عمود نباشد. فقط یک صفحه



اهتمام ادبی (واحد آزمون‌های آنلاین)  
<https://exam.ehtemadadabi.ir>

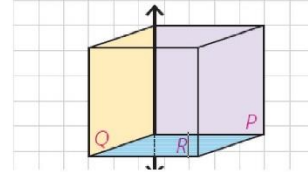
۱۰- دو صفحه P و Q برهم عمودند و خط d نیز بر صفحه P عمود است. این خط نسبت به صفحه Q چه وضعی دارد؟

موازی است



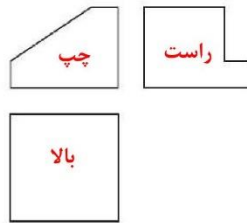
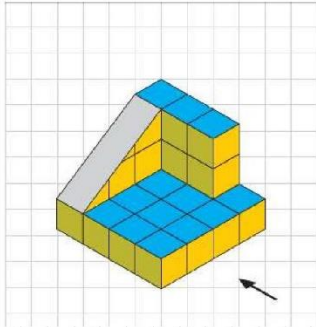
۱۱- دو صفحه متقاطع P و Q بر صفحه R عمودند. فصل مشترک این دو صفحه نسبت به صفحه R چه وضعیتی دارد؟

عمود است





کار در کلاس

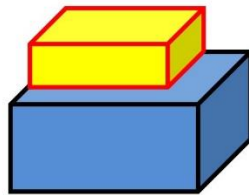


۱- شکل روبه‌رو از نماهای مختلف رسم شده است. مشخص کنید در هر تصویر از کدام جهت به شکل نگاه شده است؟

۲- سعی کنید از جهت‌های مختلف به هر شکل نگاه کرده و آن نما را رسم کنید.

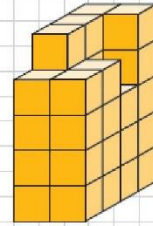
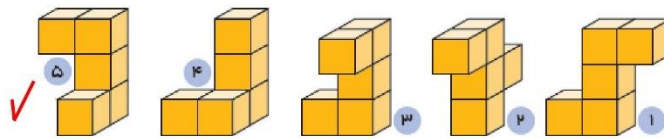
	نمای چپ	نمای بالا	نمای روبه‌رو

۳- دو مکعب مستطیل را روی هم قرار داده‌ام. ابعاد مکعب مستطیل بالایی از مکعب مستطیل پایینی کمتر است. تصویری از این دو مکعب مستطیل رسم کنید که نمای روبه‌رو و نمای بالا را نشان دهد.



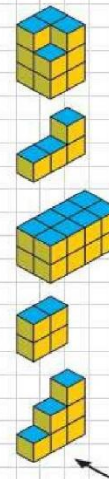


۱- کدام قطعه، شکل سمت راست را به یک مکعب مستطیل کامل تبدیل می‌کند؟

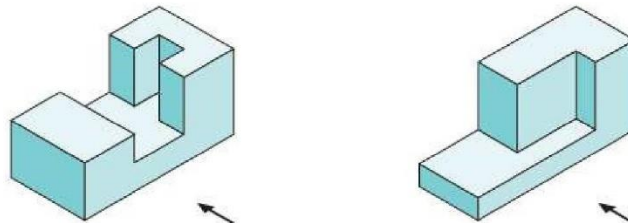


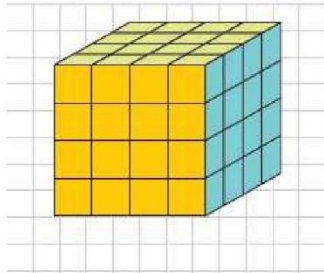
۲- نمای روبه‌رو، چپ و بالای مکعب‌های سمت راست در ستون سمت چپ رسم شده است. هر شکل را به نماهای مربوط به آن وصل کنید.

نمای بالا	نمای چپ	نمای روبه‌رو



۳- در هر شکل، نمای بالا، روبه‌رو و سمت چپ را رسم کنید.





۴- تمام وجه‌های مکعبی را رنگ آمیزی کرده‌ایم.

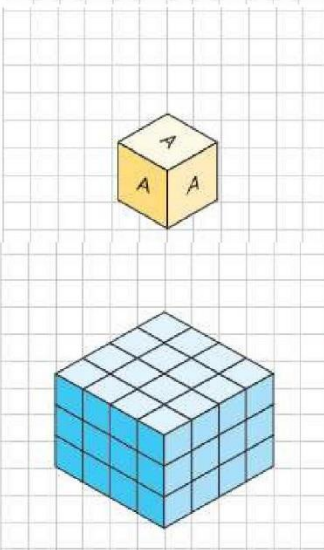
- چند مکعب کوچک در این شکل وجود دارد؟ ۶۴

- چند مکعب، رنگ نشده است؟ ۸

- چند مکعب، رنگ شده است؟ ۵۶

- چند مکعب، فقط دو وجه رنگ شده دارد؟ ۲۴

- چند مکعب، سه وجه رنگ شده دارد؟ ۸

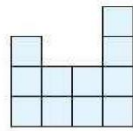


۵- روی تمام وجه‌های مکعب‌هایی حرف A نوشته شده است. ۸ تا از این مکعب‌ها

را به شکل ستونی روی هم می‌چینیم. چند حرف A دیده می‌شود؟ ۳۳

۶- شکل سمت چپ از چند مکعب کوچک تشکیل شده است؟ ۴۸

حداقل چند تا و حداکثر چند مکعب باید برداشته شود تا نمای بالا به این شکل باشد؟ ۱۵



صفحه ۹۲



دایره



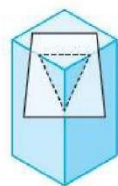
بیضی



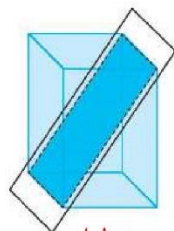
مستطیل

در سال‌های آینده با تعریف دقیق‌تر بیضی آشنا خواهید شد.

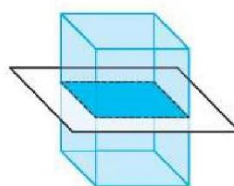
- سطح مقطع یک مکعب مستطیل با صفحه‌های قائم، افقی و مایل به چه شکل است؟



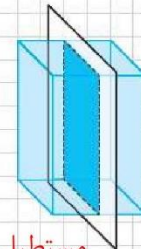
مثلث



مستطیل



مستطیل

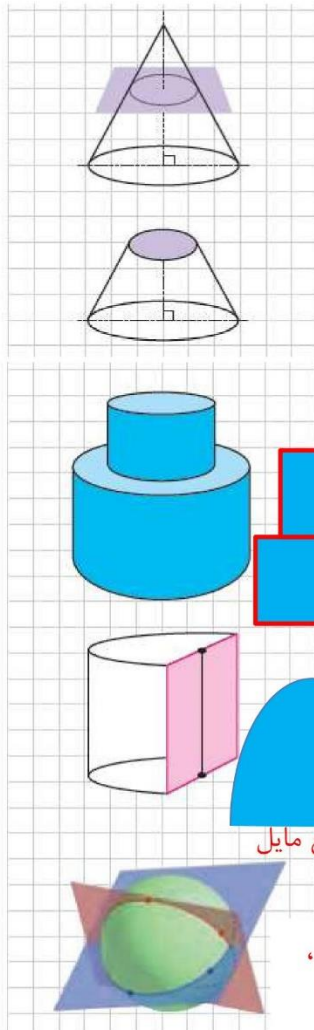


مستطیل



اهتمام ادبی (واحد آزمون‌های آنلاین)

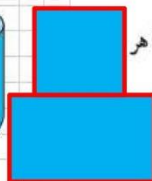
<https://exam.ehtemameadabi.ir>



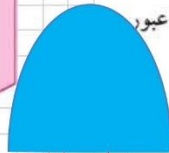
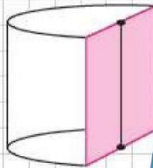
– مخروط قائمی را مطابق شکل با صفحه‌ای موازی قاعده آن برخورد داده‌ایم. این صفحه مخروط را به دو بخش تقسیم می‌کند. بخش بالایی به چه شکل است؟ **دایره**  
بخش زیرین را مخروط ناقص می‌نامند.  
اگر صفحه‌ای به شکل عمودی مخروط ناقص را قطع کند، سطح مقطع حاصل چیست؟ **دو زنگه**

**کاردرکلاس**

۱- دو استوانه را روی هم قرار داده‌ایم. اگر صفحه‌ای به شکل عمودی با هر این استوانه‌ها برخورد کند، سطح مقطع حاصل به چه شکل خواهد بود؟



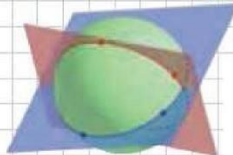
۲- در شکل زیر نصف یک استوانه داده شده است. سطح مقطع این شکل در برخورد با صفحه‌های افقی، عمودی و صفحه مایلی که از قاعده استوانه عبور نکند به چه شکل است؟



**مقطع مایل**

**مقطع افقی**

۳- سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک کره به چه شکل است؟  
در چه صورت این سطح مقطع بیشترین مساحت ممکن را خواهد داشت؟



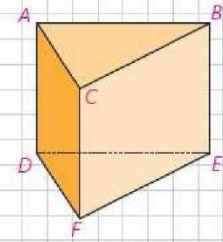
**دایره** – در صورتی که صفحه قاطع از مرکز کره بگذرد سطح مقطع ،

بیشترین مساحت ممکن را دارد

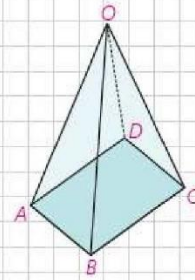




۱- فرض کنید منشور زیر، یک قطعه جوی توپر باشد. این قطعه جویی را طوری اریه می‌کنیم که از سه نقطه مشخص عبور کند. در هر حالت مشخص کنید سطح مقطع به چه شکل است و منشور به چه شکل‌های فضایی تجزیه می‌شود؟  
 الف) M, N, P و وسط پاره‌های BE, CF و AD دو منشور هم اندازه و هم شکل  
 ب) E, D, C یک هرم مثلث القاعده و یک هرم باقاعده چهارضلعی  
 ج) C, F, Q (وسط پاره خط AB) دو منشور هم اندازه

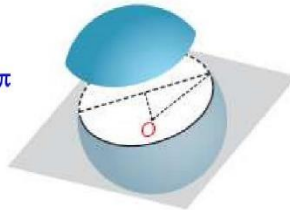


۲- قاعده هرمی، مستطیل ABCD است. رأس این هرم را O نامیده‌ایم. سطح مقطع حاصل از برخورد صفحه P با این هرم در هر حالت مشخص کنید.  
 الف) صفحه P بر ارتفاع هرم عمود باشد. **مستطیل**  
 ب) صفحه P از O بگذرد و بر قاعده هرم عمود باشد. **مثلث**  
 ج) صفحه P از O نگذرد؛ ولی بر قاعده هرم عمود باشد. **دورنقه**



۳- صفحه P کره‌ای به مرکز O و شعاع ۵ سانتی‌متر را قطع کرده است. اگر فاصله نقطه O از صفحه ۳ سانتی‌متر باشد، مساحت این سطح مقطع چقدر است؟

$$r^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow r = 4 \Rightarrow S = \pi r^2 = 16\pi$$



۴- دو کره با شعاع‌های r و r' یکدیگر را قطع کرده‌اند. نقاط مشترک واقع بر روی هر دو کره روی چه شکلی قرار دارند؟ **دایره**  
 اگر همه این نقاط را به مرکز یکی از دو کره وصل کنیم، چه شکلی به دست می‌آید؟ **مخروط**



اهتمام ادبی (واحد آزمون‌های آنلاین)

<https://exam.ehtemameadabi.ir>

## دوران حول محور



از دوران دادن شکل‌های متفاوت هندسی، حول یک محور می‌توان جسم‌های هندسی مختلفی را تصور کرد.



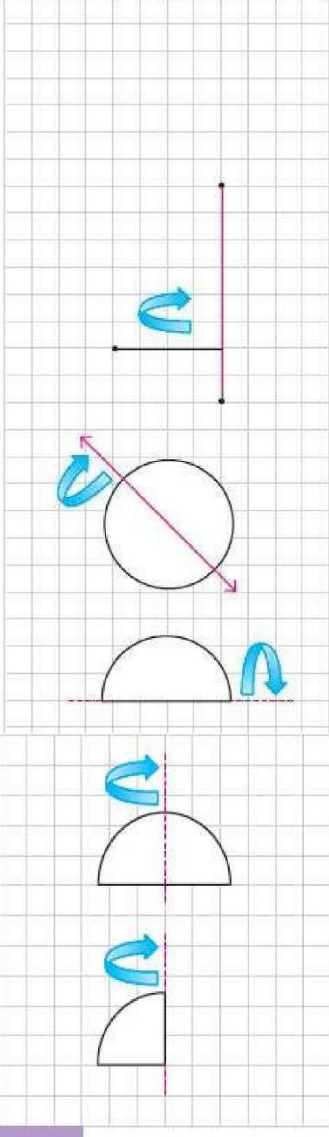
– فرض کنید دو پاره‌خط برهم عمودند و یکی را حول دیگری دوران داده‌ایم. چه شکل هندسی‌ای ساخته می‌شود؟ **استوانه**

– دایره‌ای به شعاع  $r$  را حول یکی از قطرهای آن دوران داده‌ایم. شکل حاصل چیست؟ **کره**

– یک نیم دایره را حول قطر دوران می‌دهیم. شکل حاصل چه خواهد بود؟ **کره**

– اگر همین نیم دایره را حول شعاع عمود بر قطر داده شده دوران دهیم، چه شکلی ساخته می‌شود؟ **نیم کره**

– اگر ربع یک دایره را حول شعاع مشخص شده دوران دهیم، شکل حاصل چه خواهد بود؟ **نیم کره**

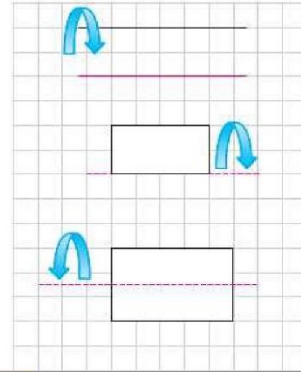




اهتمام ادبی (واحد آزمون‌های آنلاین)

<https://exam.ehtemameadabi.ir>

– دو خط موازی را در نظر بگیرید. اگر یکی از خطوط را حول دیگری دوران دهیم، چه جسم هندسی‌ای ساخته می‌شود؟ **استوانه**

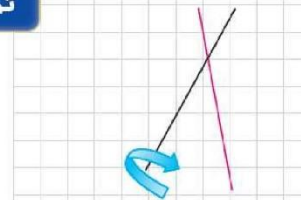


– اگر یک مستطیل را حول طول یا عرض آن دوران دهیم، چطور؟ **استوانه**

– اگر مستطیل را مطابق شکل، حول محور داده شده دوران دهیم، شکل حاصل چه خواهد بود؟ **استوانه**



۱– دو خط متقاطع را مطابق شکل در نظر بگیرید. اگر یکی از خطوط را حول دیگری دوران دهیم، چه جسم هندسی‌ای ساخته می‌شود؟



**دو مخروط با راس و محور مشترک**

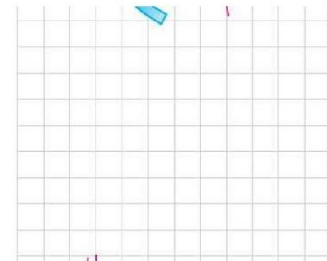
۲– در هر مورد مشخص کنید شکل حاصل از دوران چه خواهد بود؟ تصویر مناسبی رسم کنید.

الف) دوران یک مثلث متساوی الساقین حول ارتفاع آن: **مخروط**

ب) دوران یک مثلث قائم الزاویه حول یک ضلع زاویه قائمه: **مخروط**

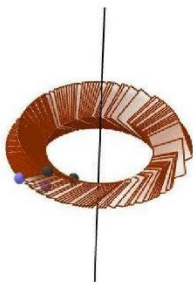
پ) دوران یک دوزنقه قائم الزاویه حول ضلع عمود بر قاعده‌ها: **مخروط ناقص**

ت) دوران یک مثلث متساوی الساقین حول قاعده آن:

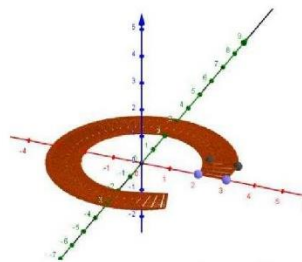


**دو مخروط مساوی با قاعده مشترک (دوک)**

۳– مربعی به ضلع  $a$  را حول محور  $d$  دوران داده‌ایم. شکل حاصل را توصیف کنید.

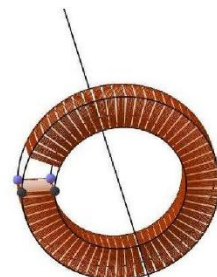


اگر خط، صفحه مربع را قطع کند



اگر خط بر صفحه مربع

عمود باشد



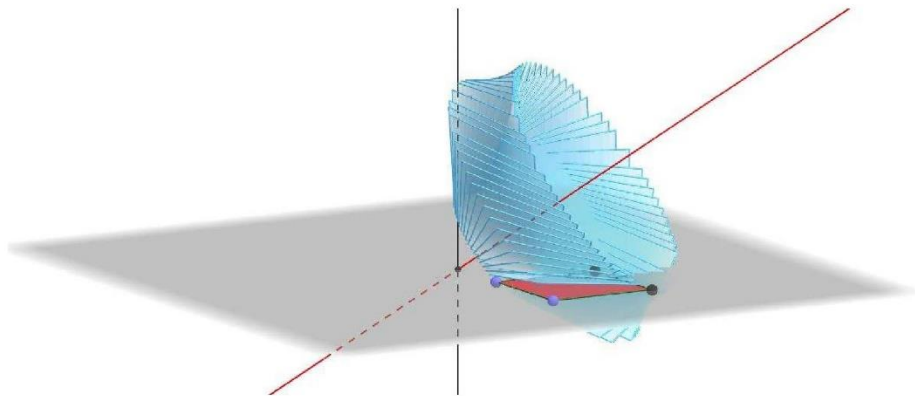
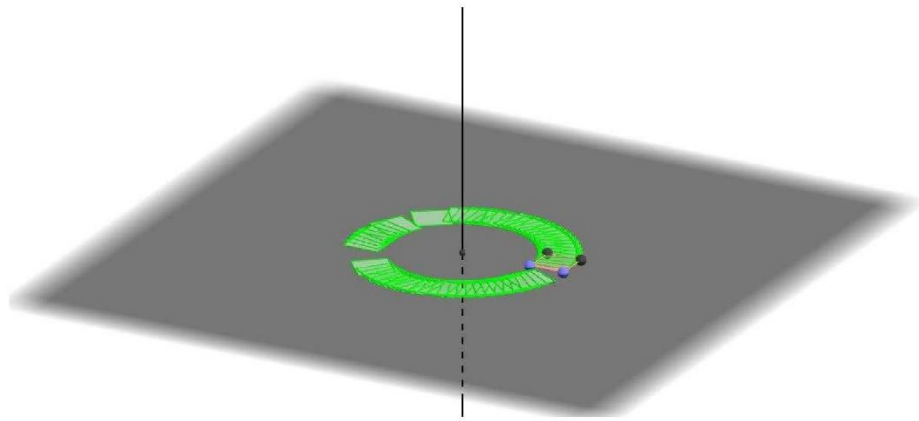
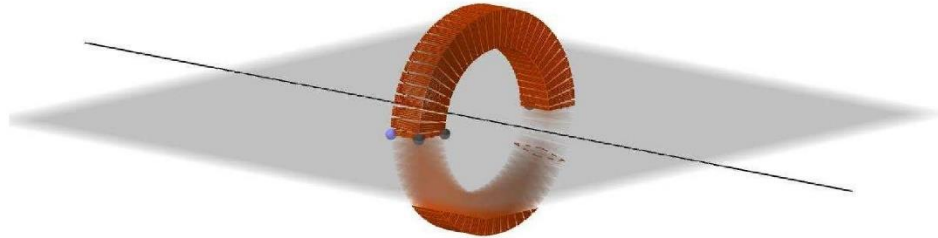
اگر خط و مربع

در یک صفحه باشند



اهتمام ادبی (واحد آزمون‌های آنلاین)

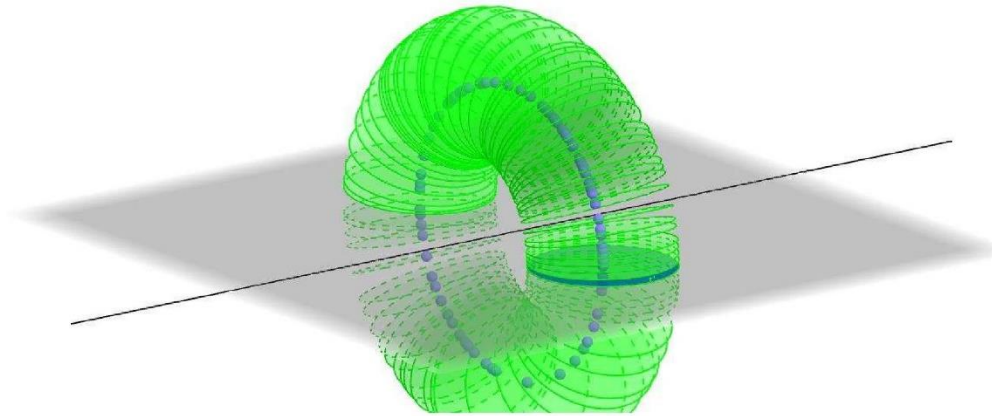
<https://exam.ehtemameadabi.ir>





اهتمام ادبی (واحد آزمون‌های آنلاین)  
<https://exam.ehtemameadabi.ir>

۴- شکل زیر را در نظر بگیرید. این شکل از دوران کدام شکل هندسی حول یک محور ساخته می‌شود؟ تصویر مناسبی برای آن رسم کنید. **دایره**





تمرین های تکمیلی :

۱- چهار نقطه غیر واقع بر یک صفحه مفروض اند.

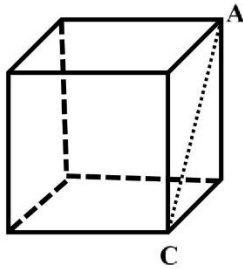
الف : چند صفحه وجود دارد که حداقل از سه نقطه از آنها بگذرد

ب : چند خط وجود دارد که حداقل از دو نقطه از آنها بگذرد

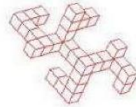
ج : چند جفت صفحه موازی می توان رسم کرد که یکی از آنها شامل سه نقطه و دیگری از نقطه چهارم بگذرد.

۲- از یک نقطه خارج از دو خط متنافر چند خط وجود دارد که از آن نقطه بگذرند و بر هر دو خط عمود باشند.

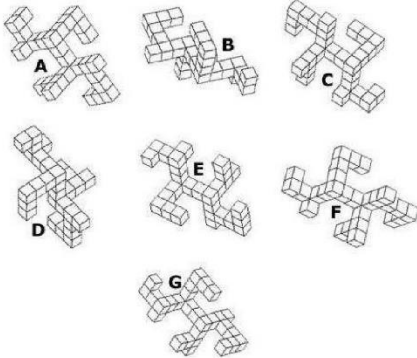
۳- دو خط متنافر و یک نقطه خارج آنها مفروض اند چند خط وجود دارد که از آن نقطه بگذرند و دو خط متنافر را قطع کنند.



۴- در شل مقابل اگر صفحه ای از قطر AC بگذرد و مکعب را چنان قطع کند که هیچکدام از یالهای مکعب روی آن صفحه نباشند . مقطع ایجاد شده چه شکلی دارد؟

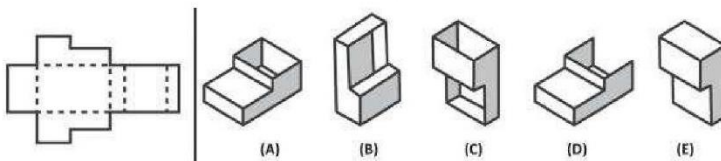


۵- کدامیک از تصاویر زیر از با شکل مقابل شبیه است ؟



۶- خط d و دو صفحه متمایز  $P, P^f$  مفروض اند اگر d بر صفحه P عمود بوده و بر یکی از خطوط صفحه ی  $P^f$  نیز عمود باشد . وضعیت نسبی دو صفحه  $P, P^f$  را با رسم شکل مشخص کنید.

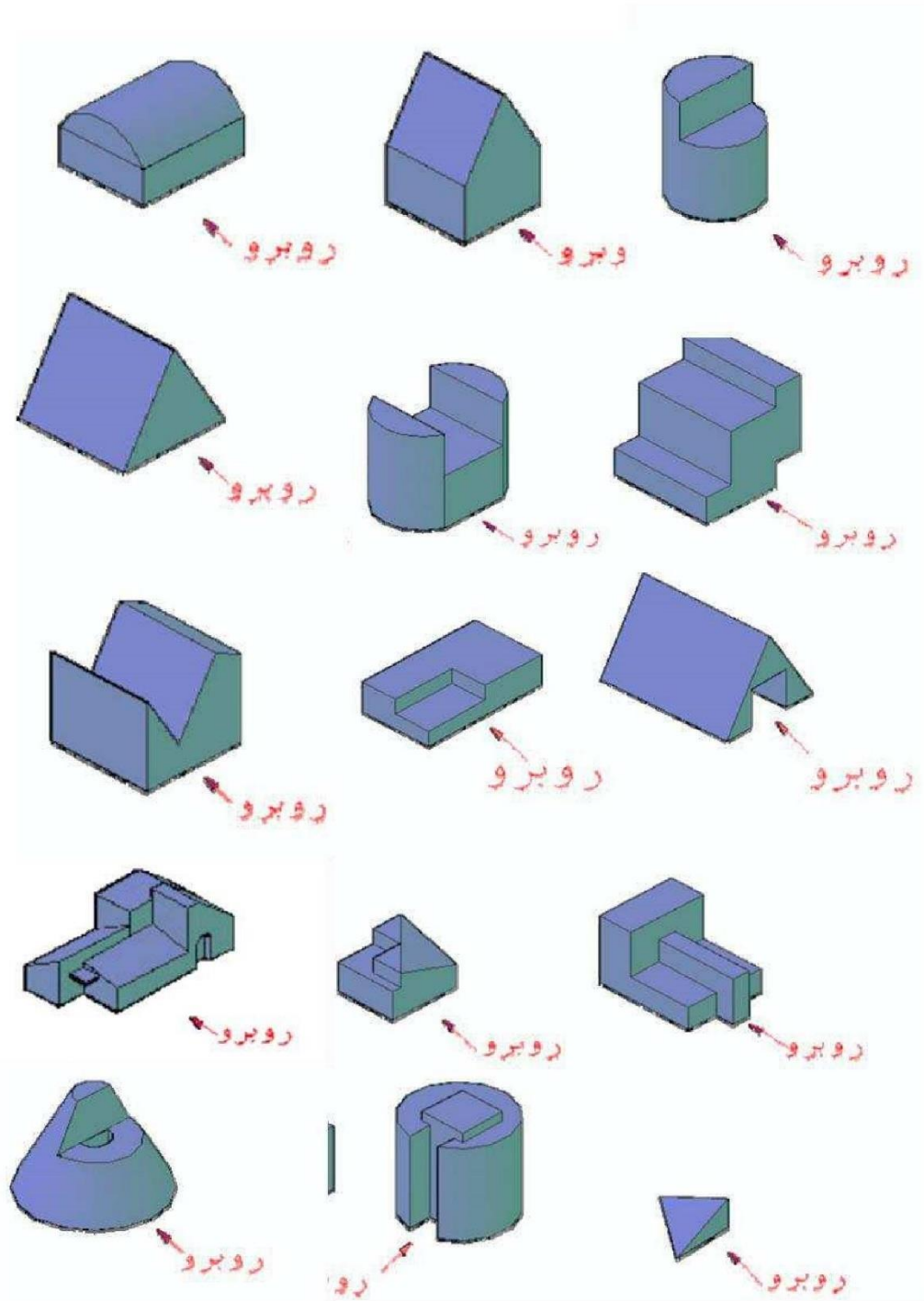
۷- شکل سمت چپ گسترده شده کدامیک از اجسام سمت راست می باشد؟





اهتمام ادبی (واحد آزمون‌های آنلاین)  
<https://exam.ehtemameadabi.ir>

۸- برای هر شکل سه نمای روبرو - بالا و نمای جانبی را با رعایت اصول رسم و تمیز بودن کاغذ رسم کنید.





اهتمام ادبی (واحد آزمون‌های آنلاین)

<https://exam.ehtemameadabi.ir>

#### نقد و بررسی :

- ❖ هدف این فصل همان گونه که از نام آن مشخص است درک شهودی از فضای سه بعدی می باشد. اگر چه درک شهودی از فضای سه بعدی لازم و ضروری است ولی افراط در آن باعث می شود دانش آموز اهمیت قیاس و استدلال استنتاجی را درک نکند.
- ❖ نامتهای بودن مفاهیمی مانند خط ، صفحه و فضا در مثالهای کتاب به خوبی تبیین نشده است و این باعث صدمات جبران ناپذیری در درک دانش آموزان از فضای سه بعدی خواهد شد.
- ❖ در تمرینات صفحه ۸۴ اختصاص سه سوال ۴ و ۵ و ۶ (با قسمت های زیاد) از بین ۱۱ سوال به یک مفهوم ثابت نه تنها ضروری نیست بلکه برای دانش آموز کسالت بار است و بار آموزشی ندارد.
- ❖ بخش مربوط به دوران بدون هیچ گونه تعریف یا مقدمه ای از دوران ارئه شده است.